

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Estabilidad de un Modelo SIS No Lineal Gobernado por un
Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:

Mg. Albitres Infantes, Jhonny Javier
Código ORCID: 0000-0001-6217-7344
DNI N° 18067237

Asesor:

Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

Línea de Investigación
Ecuaciones Diferenciales

Nuevo Chimbote - PERÚ
2025



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "ESTABILIDAD DE UN MODELO SIN LINEAL GOBERNADO POR UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS", por el maestro Jhonny Javier Albitres Infantes, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, noviembre del 2025.

Dr. Milton Milciades Cortez Gutierrez
ASESOR
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"Estabilidad de un Modelo SIS No Lineal Gobernado por un Sistema de Ecuaciones
Diferenciales Ordinarias"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

DR. FIDEL ALEJANDRO VERA OBESO
PRESIDENTE
CODIGO ORCID: 0000-0002-9125-0464
DNI N° 32857547

DR. TEODORO MOORE FLORES
SECRETARIO
CODIGO ORCID: 0000-0002-1755-3459
DNI N° 32763522

DR. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIERREZ
VOCAL
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los veinte y un días del mes de noviembre del año 2025, siendo las 12:30 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 747-2025-EPG-UNS de fecha 12.08.2025, conformado por los docentes: Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso (Presidente), Dr. Teodoro Moore Flores (Secretario) y Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis intitulada: "**ESTABILIDAD DE UN MODELO SIS NO LINEAL GOBERNADO POR UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS**"; presentado por el tesista **Jhonny Javier Albitres Infantes**, egresado del programa de **Doctorado en Matemática**.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 943-2025-EPG-UNS de fecha 19 de noviembre de 2025.


El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADA, asignándole la calificación de DIECINUEVE.

Siendo las 13:10 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso
Presidente


Dr. Teodoro Moore Flores
Secretario


Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
Vocal/Asesor




Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Jhonny Javier ALBITRES INFANTES
Título del ejercicio: DOCTORADO 2025
Título de la entrega: ESTABILIDAD DE UN MODELO SIS NO LINEAL GOBERNADO PO...
Nombre del archivo: tesis_SIS_JHONNY_ALBITRES_INFANTES_06_01_26_docx.docx
Tamaño del archivo: 282.66K
Total páginas: 49
Total de palabras: 8,505
Total de caracteres: 50,039
Fecha de entrega: 13-ene-2026 11:12a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2853687178

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA	
	UNS
"ESTABILIDAD DE UN MODELO SIS NO LINEAL GOBERNADO POR UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS"	
Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática.	
Autor:	
Mg. Albitres Infantes Jhonny Javier Código Orcid: 0000-0001-6217-7344 DNI: 18067237	
Asesor:	
Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez Código ORCID: 0000-0003-4939-7734 DNI N° 18162818	
Línea de Investigación Ecuaciones Diferenciales	
NUEVO CHIMBOTE - PERÚ 2025	

ESTABILIDAD DE UN MODELO SIS NO LINEAL GOBERNADO POR UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

INFORME DE ORIGINALIDAD

14%	14%	1%	4%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	cybertesis.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	6%
2	hdl.handle.net Fuente de Internet	2%
3	www.coursehero.com Fuente de Internet	1%
4	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	1%
5	doczz.es Fuente de Internet	<1%
6	qdoc.tips Fuente de Internet	<1%
7	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	<1%
8	vsip.info Fuente de Internet	<1%
9	pdfcoffee.com Fuente de Internet	<1%
10	Submitted to Universidad de Burgos UBUCEV Trabajo del estudiante	<1%
11	Submitted to Universidad Nacional Federico Villarreal	<1%

DEDICATORIA

A mi querida madre, por su motivación, entrega de amor incondicional y por guiarme por el buen camino.

A mi padre, que está en el cielo, pero cuya presencia siento en cada logro. A mis hijos Johe Alexander, Kriss Pamela y Anthony Javier a mi nieta Aphril Ariadne, quienes representan mi mayor alegría y motivación. Gracias por ser parte de mi esfuerzo y ser impulso constante en mi camino.

Y a mi amada esposa Lucy, compañera de lucha y vida, gracias por tu paciencia, comprensión y amor sincero. Tu apoyo incondicional ha sido importante en la culminación de la tesis.

AGRADECIMIENTO

A Dios, por darme la sabiduría necesaria para culminar mi tesis de manera satisfactoria.

A mi asesor, Dr. Milton Cortez Gutiérrez, por su orientación en este proceso de esta investigación.

Y a mi familia, especialmente a mi esposa, hijos, nieta y madre, por su amor incondicional, su paciencia y su apoyo constante. Este logro es también es de ustedes.

INDICE

RESUMEN	ix
ABSTRACT.....	x
INTRODUCCIÓN	11
I. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	12
1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación	12
1.2. Antecedentes de la investigación	14
1.3. Formulación del problema de investigación	18
1.4. Delimitación del estudio.....	19
1.5. Justificación e importancia.....	19
1.6. Objetivos de la investigación: General y específicos.....	20
II. MARCO TEÓRICO	21
2.1. Fundamentos básicos de la investigación.....	21
2.2. Bases teóricas	22
2.3. Marco conceptual	24
III. METODOLOGÍA.....	36
3.1. Hipótesis central de la investigación	36
3.2. Variables e indicadores de la investigación	37
3.3. Métodos de la investigación	38
3.4. Diseño o esquema de la investigación.....	39
3.5. Población y muestra	40
3.6. Actividades del proceso investigativo	40
3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación	40

3.8. Procedimiento para la recolección de los datos.....	40
3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de datos	40
IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	41
4.1. Resultados	41
4.2. Discusión.....	50
V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	52
6.1. Conclusiones	52
6.2. Recomendaciones.....	53
VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como finalidad analizar el comportamiento dinámico de un modelo epidemiológico del tipo SIS (Susceptible-Infectado-Susceptible), cuya incorporación particular de la incidencia no lineal de la forma $\beta S^2 I$. Esta formulación busca representar de manera más realista los escenarios donde el número de contactos entre personas susceptibles incide de manera significativa en la propagación de una enfermedad. Se parte de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la evolución temporal de la población susceptible e infectada, sometida a nacimientos, muertes naturales, pérdida de inmunidad y transmisión de la infección. A través del análisis cualitativo, se determinaron condiciones de existencia, unicidad, positividad y acotamiento de las soluciones del sistema. Por otro lado, se encontraron los puntos de equilibrio del modelo y se analizó su estabilidad local mediante procesos de linealización y evaluación del Jacobiano. En conclusión, estos resultados obtenidos permiten fortalecer la comprensión de dinámicas epidémicas complejas y ofrecen una base teórica útil para diseñar estrategias de control sanitario más efectivas.

Palabras clave: Modelo SIS, incidencia cuadrática, estabilidad, ecuaciones diferenciales, número básico de reproducción, epidemiología matemática.

ABSTRACT

The purpose of this research work is to analyze the dynamic behavior of an epidemiological model of the SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) type, whose particular incorporation of the linear incidence of the form $\beta S^2 I$. This formulation seeks to represent in a more realistic way the scenarios where the number of contacts between susceptible people has a significant impact on the spread of an illness. It is part of a system of ordinary differential estimates that describe the temporal evolution of susceptible and infected populations, subject to births, natural deaths, loss of immunity and transmission of infection.

Through qualitative analysis, conditions of existence, unicity, positivity and acceptance of system solutions will be determined. On the other hand, the model's equilibrium points will be found and its local stability will be analyzed through Jacobian linearization and evaluation processes. In conclusion, these results obtained allow us to strengthen the understanding of complex epidemic dynamics and provide a useful theoretical basis for designing more effective health control strategies.

Palabras clave: Modelo SIS, incidencia cuadrática, estabilidad, ecuaciones diferenciales, número básico de reproducción, epidemiología matemática.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el estudio de modelos matemáticos aplicados a la epidemiología ha cobrado una importancia crucial, especialmente frente a los retos planteados por la rápida propagación de enfermedades infecciosas. Estos modelos permiten no solo representar el comportamiento dinámico de las epidemias, sino también anticipar escenarios, evaluar estrategias de control y contribuir a la toma de decisiones en políticas de salud pública. Entre los modelos más representativos se encuentra el SIS (Susceptible-Infectado-Susceptible), el cual describe enfermedades que no confieren inmunidad permanente tras la recuperación, como ocurre con algunas infecciones bacterianas y virales recurrentes.

Tradicionalmente, los modelos SIS emplean una tasa de incidencia lineal, donde la probabilidad de contagio depende directamente del número de susceptibles e infectados. No obstante, esta formulación puede resultar limitada cuando se analizan contextos de alta densidad poblacional o patrones de contacto más complejos entre individuos. Por consiguiente, surge la necesidad de explorar variantes del modelo clásico que incorporen dinámicas más realistas. En este marco, el presente trabajo se enfoca en el análisis cualitativo de un modelo SIS no lineal, cuya tasa de incidencia adopta la forma $\beta S^2 I$, introduciendo una componente cuadrática que refleja de manera más adecuada situaciones donde la interacción entre susceptibles es más intensa o masiva.

Esta investigación tiene como propósito principal analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de dicho modelo, a través del uso de herramientas matemáticas como las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y el análisis del Jacobiano, identificando las condiciones bajo las cuales la enfermedad tiende a desaparecer o, por el contrario, se mantiene de forma endémica en la población.

I. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

A lo largo de la historia, los modelos epidemiológicos han sido herramientas fundamentales para describir, comprender y anticipar la dinámica de propagación de enfermedades infecciosas en poblaciones humanas. Desde los trabajos pioneros de Kermack y McKendrick (1997), se han desarrollado estructuras matemáticas que permiten simular y analizar la evolución de epidemias en comunidades de gran escala. Entre los modelos clásicos más representativos se encuentran el SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados) y el SIS (Susceptibles-Infectados-Susceptibles), los cuales ofrecen una visión simplificada pero poderosa del proceso de contagio. Inicialmente, estos modelos asumían poblaciones homogéneamente mezcladas, donde cualquier individuo tenía la misma probabilidad de interactuar con otro, sin considerar estructuras de contacto más realistas. Posteriormente, Lajmanovich y Yorke (1976) introdujeron un enfoque más complejo al proponer un modelo SIS sobre redes, el cual fue aplicado al estudio de la transmisión de la gonorrea, considerando conexiones sociales descritas mediante grafos, lo que permitió representar mejor las interacciones heterogéneas entre individuos.

En el contexto actual, marcado por la aparición y reaparición de enfermedades transmisibles, el estudio y perfeccionamiento de estos modelos se vuelve aún más pertinente. Como sostiene Martins de Assis (2020), las enfermedades infecciosas continúan siendo un reto significativo para la salud pública global, lo que exige herramientas más refinadas que permitan entender no solo cómo se propagan las enfermedades, sino también su duración, impacto regional, tasas de curación y mecanismos de control.

El trabajo desarrollado se enfoca en el estudio de un modelo SIS no lineal, caracterizado por una función de incidencia de tipo cuadrática, específicamente de la forma $\beta S^2 I$. Este tipo de incidencia representa una variación del modelo clásico, al introducir una mayor sensibilidad a los niveles de susceptibilidad. Esta formulación corresponde al caso particular de una tasa de

incidencia generalizada $\lambda S^p I^q$, con $p=2$ y $q=1$, lo que permite modelar escenarios en los que la propagación depende de interacciones más intensas entre susceptibles e infectados. El objetivo principal de este trabajo es estudiar la estabilidad del modelo epidemiológico SIS no lineal propuesto, a través de un análisis cualitativo que permita identificar las condiciones en las que la enfermedad puede persistir o desaparecer dentro de una población.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que rige el comportamiento del modelo está dado por:

$$(1^*) \begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu T - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S & \dots (1) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I & \dots (2) \end{cases}$$

Donde:

S: número de individuos susceptibles

I: número de individuos infectados en el tiempo t .

μT : Tasa de nacimiento

β : Tasa de transmisión (número promedio de contactos adecuados para la infección de una persona por unidad de tiempo).

α : Tasa de muerte natural, **γ** : Tasa de pérdida de inmunidad.

$\frac{1}{\gamma}$: Período promedio de inmunidad temporal

Este modelo permite examinar, desde una perspectiva matemática y epidemiológica, cómo el comportamiento de la enfermedad se ve afectado por variaciones en los parámetros del sistema. A partir de este enfoque, se pretende determinar los puntos de equilibrio del modelo y estudiar su estabilidad mediante técnicas cualitativas y análisis de la matriz Jacobiana, complementando el estudio con simulaciones numéricas que apoyen y visualicen los resultados obtenidos teóricamente.

1.2. Antecedentes de la investigación

Investigaciones nacionales

Huamán y Rodríguez (2021), en su investigación “*Análisis de estabilidad de un modelo SIS con dinámica vital aplicado a enfermedades recurrentes*” realizada en zonas rurales de Perú. Su objetivo fue aplicar un modelo SIS con dinámica vital a enfermedades de reaparición frecuente en zonas rurales del país. Propusieron una incidencia no lineal generalizada de la forma $\beta S^p I^q$, analizando los casos específicos en los cuales $p = 2$ y $q = 1$. Concluyeron que el número básico de reproducción constituye el principal umbral que define la permanencia o extinción de la enfermedad. Además, identificaron que incrementos en la tasa de transmisión pueden generar cambios sensibles en la estabilidad del sistema. Por consiguiente, se asume la importancia de del estudio al considerar incidencias no lineales para representar adecuadamente la transmisión en comunidades con alta interacción social.

Por su parte, Salazar (2019), en una investigación “*Modelamiento matemático de enfermedades infecciosas mediante sistemas tipo SIS con parámetros variables en el tiempo*”, realizada en Lima. Su objetivo fue analizar enfermedades recurrentes en poblaciones urbanas, donde incorporó una incidencia no lineal y examinó cómo la variabilidad temporal en la tasa de contagio afecta la estabilidad de la enfermedad. Aplicó el jacobiano y el análisis de los autovalores, donde determinó que pequeñas modificaciones en dichos parámetros pueden modificar el comportamiento del equilibrio libre de infección. Esta contribución resulta particularmente relevante, pues demuestra que incluso modelos SIS relativamente simples pueden presentar dinámicas complejas cuando se introducen no linealidades en la incidencia.

Asimismo, Torres (2018), su objetivo fue analizar un modelo SIS orientado a la propagación de infecciones de corta duración, mediante EDO el cual fue desarrollado en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Asimismo, empleo la linealización y utilizo los puntos críticos para estudiar la evolución del sistema. En su resultado destaca la inclusión de funciones de

incidencia no lineal permite capturar de manera más realista comportamientos epidemiológicos que no pueden describirse adecuadamente bajo una incidencia estrictamente bilineal.

Finalmente, Pino (2017), en su estudio titulado “*Análisis y Simulación Numérica de un Modelo Matemático SI con Retardo Discreto para las Enfermedades de Transmisión Sexual*”, desarrollado en la ciudad de Lima, Perú, tuvo como finalidad examinar de manera cualitativa el comportamiento de los modelos matemáticos epidemiológicos del tipo SI. Su enfoque consideró tanto el caso de contagio inmediato, representado a través de ecuaciones diferenciales ordinarias. Asimismo, también estudio cuando un individuo recién expuesto aún no se convierte en un agente infeccioso, lo cual fue abordado mediante ecuaciones diferenciales con retardo. El análisis cualitativo fue complementado con simulaciones numéricas, permitiendo interpretar mejor la dinámica del contagio. Al finalizar, se concluyó que el estudio matemático de estos modelos constituye una herramienta clave para comprender a fondo la propagación de enfermedades y apoyar la toma de decisiones en el campo de la salud pública.

Investigaciones internacionales

Dos Santos y Cordero (2020) en su trabajo de investigación “Modelo Epidemiológico para a Malária nas Cidades de Manaus e Lábrea” realizado en Manaus – Brasil, su objetivo fue el estudio de un modelo epidemiológico alternativa para la malaria en las ciudades Manaus y Lábrea. Usaron un modelo matemático SIS (susceptible – infectado), describiendo la malaria entre los años 2009 y 2014. Cuya formulación del modelo fue la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases}$$

Donde:

S: Población Susceptible

I: Población Infectada

α : Tasa de transmisión

β : Tasa de recuperación

$I + S = N$ Población total.

Cuya conclusión fue que describieron la dinámica de la malaria en las ciudades de Manaus e Lábrea. Con la obtención de los datos de casos confirmados de la malaria pudieron determinar los parámetros α y β . También determinaron los puntos de equilibrio y suprimieron las ecuaciones de la dinámica de los mosquitos, para que el modelo sea lo más simple.

Asimismo, Aguadero (2020) en su trabajo de grado titulado “Estudio matemáticos de modelos epidemiológicos” analizó el modelo SIS, cuyo sistema de ecuaciones diferenciales es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma N - \beta \frac{SI}{N} - p\gamma I + \delta I - \sigma S, \\ \dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - (\delta + \sigma + \varepsilon - p\gamma)I \end{cases}, \quad (*)$$

Donde:

S : Población Susceptible I : Población Infectada; $I + S = N$ Población total

δ : Tasa de recuperados

σ y ε : Tasa de muerte natural y tasa de muerte asociada a la enfermedad.

p : fracción de recién nacidos que quedan infectados al nacer.

Cuyo resultado, fue que determino los puntos de equilibrio del sistema. Asimismo, encontró el número reproducción básico (R_0), es decir

$$\begin{cases} E_0 = \left(\frac{\gamma}{\sigma} \cdot N, 0 \right) \\ E_* = \left(\frac{\gamma}{\sigma} \cdot \frac{N}{R_0}, \frac{\gamma \cdot N}{\sigma + \varepsilon} \cdot \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right) \end{cases}, \quad R_0 = \frac{\beta \gamma}{\sigma(\delta + \sigma + \varepsilon - p\gamma)}$$

Además, analizó la estabilidad en el punto de equilibrio E_* del sistema (*), demostrando que es globalmente estable.

Alpizar (2016), en su investigación titulada “*Análisis de un modelo SIS para el estudio de la dinámica de propagación de la enfermedad al aplicar medidas de control*”, se propuso examinar un modelo SIS discreto de tipo metapoblacional con el fin de identificar aquellos parámetros que pudieran ser intervenidos y que simbolizan la implementación de estrategias de control. El propósito central fue comprender cómo dichas medidas inciden en el comportamiento de la propagación de la enfermedad. Una vez determinados estos parámetros clave, se procedió a realizar simulaciones que reproducen posibles escenarios reales, permitiendo así explorar de forma más tangible los efectos de las decisiones en contextos diversos.

El modelo que planteo fue el siguiente:

$$S_{k+1} = \gamma G_k S_k + \gamma(1 - \sigma\tau)I_k$$

$$I_{k+1} = \gamma(1 - G_k)S_k + \gamma\sigma\tau I_k$$

Donde

$$G_k = \exp\left(\frac{-\alpha I_k}{N_k}\right)$$

El modelo planteado por el autor se basa en un sistema discreto SIS, donde se incorpora una función probabilística G_k , que representa la probabilidad de que un individuo permanezca susceptible entre dos momentos consecutivos. Este valor depende de la proporción de infectados y una constante que refleja la influencia de la prevalencia en la transmisión. Se asume que la población total permanece constante, sin considerar nacimientos ni muertes. A través de este enfoque, se concluye que las simulaciones matemáticas permiten obtener valiosa información sobre la efectividad de las medidas de control, lo que resulta fundamental para que los profesionales de la salud diseñen estrategias oportunas y eficaces en el ámbito de la salud pública.

Francois , Dronnier, y André (2020) en su investigación “Un modelo SIS de dimensiones infinitas” su objetivo fue presentar un modelo SIS determinista de dimensión infinita que tiene

en cuenta la heterogeneidad de las infecciones y la red social entre una gran población. También estudiaron el comportamiento a largo plazo de la dinámica. Concluyendo la identificación del número de reproducción básico R_0 que determina si existe una endémica estable estado estacionario (caso supercrítico: $R_0 > 1$) o si el único equilibrio es libre de enfermedad (crítico y caso subcrítico: $R_0 \leq 1$). Como aplicación también demostraron que los llamados mecanismos de vacunación "con fugas" y "todo o nada" tienen el mismo efecto sobre R_0 .

Gao, Wang, y Liu (2019) en su investigación “Dinámica de una epidemia estocástica de modelo SIS con tasas de incidencia no lineales”. La finalidad de este estudio es hacer contribuciones para analizar la dinámica de los modelos epidémicos del SIS con tasa de incidencia no lineal. Primero, expandieron un modelo de epidemia determinista del SIS al introducir la mortalidad adicional. Para el sistema modificado, analizando la estabilidad de los equilibrios, definieron un umbral que determina la extinción y permanencia de la enfermedad epidémica. En segundo lugar, establecieron un sistema estocástico introduciendo la perturbación del ruido blanco en el sistema determinista. Para el sistema estocástico, definieron un nuevo umbral asociado con su contraparte determinista y analizaron la dinámica del sistema con base en el nuevo umbral utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. Concluyendo que existe una diferencia significativa de umbral del sistema estocástico de su contraparte determinista. Sin embargo, en el modelo actual, la tasa de incidencia no lineal toma la forma $\beta S^p(t)I(t)$, que es un caso especial de la tasa de incidencia no lineal con $\beta S^p(t)I^q(t)$, $q = 1, p \in \mathbb{N}$ para el caso más general $q, p \in \mathbb{R}^+$, no proporcionamos un método de análisis eficaz en la actualidad.

1.3. Formulación del problema de investigación

1.3.1. Problema general

¿Bajo qué condiciones un modelo SIS no lineal, expresado mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, asegure la estabilidad del Sistema (1*)?

1.3.2. Problemas específicos

1. ¿Bajo qué condiciones se garantiza la existencia y unicidad de las soluciones del modelo SIS no lineal, asegurando un comportamiento matemáticamente bien definido?
2. ¿Cómo se puede verificar que las soluciones del modelo SIS no lineal se mantengan positivas y acotadas en el tiempo?
3. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del sistema y qué interpretación epidemiológica puede asignarse a cada uno en relación con la desaparición o persistencia de la enfermedad?
4. ¿De qué manera puede analizarse la estabilidad local de los puntos de equilibrio mediante la linealización del sistema?
5. ¿En qué medida el número básico de reproducción R_0 influye en el comportamiento del modelo epidemiológico, y de qué forma puede interpretarse como un modelo decisivo para prever si la enfermedad se extingue o persiste en la población?

1.4. Delimitación del estudio

La investigación solo se limita al análisis cualitativo de un modelo SIS con incidencia no lineal $\beta S^2 I$. Se analiza la parte teórica de la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema dentro de un marco determinista y continuo, no hay variaciones temporales en parámetros, ni interacción con otras poblaciones o estructuras epidemiológicas más complejas.

1.5. Justificación e importancia de la investigación

Este trabajo de investigación se justifica porque se hará un análisis cualitativo profundo del modelo SIS de la forma (1*), cuya incidencia está dada por una expresión cuadrática de la forma $\beta S^2 I$. A partir de este enfoque, se pretende determinar los puntos de equilibrio del modelo y estudiar su estabilidad mediante técnicas cualitativas y análisis de la matriz Jacobiana.

En particular, el modelo SIS con incidencia no lineal nos permiten analizar de una manera más realista dinámicas en las que los individuos infectados pueden volver a ser susceptibles, en situaciones que se presenta en numerosas enfermedades recurrentes en epidemiología el cual nos representa una herramienta crucial para comprender, predecir y controlar la propagación de enfermedades infecciosas dentro de una población

Esta investigación de manera practica cobra relevancia porque permite identificar parámetros críticos del sistema como la tasa de transmisión, la tasa de recuperación o la pérdida de inmunidad y entender cómo inciden en la estabilidad de los equilibrios del modelo. Estos análisis teóricos aportan información valiosa para el diseño de estrategias de intervención, tales como campañas de prevención, aislamiento o tratamiento, que puedan aplicarse de forma oportuna en contextos reales.

1.6. Objetivos de la investigación

1.6.1. Objetivo general

Determinar las condiciones bajo las cuales un modelo SIS no lineal, expresado mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, asegure la estabilidad del Sistema (1*).

1.6.2. Objetivos específicos

1. Demostrar la existencia y unicidad de las soluciones del modelo, garantizando que el sistema de ecuaciones diferenciales tenga un comportamiento bien definido.

2. Verificar que las soluciones del modelo SIS no lineal se mantengan positivas y acotadas en el tiempo.
3. Determinar los puntos de equilibrio del sistema, con su respectiva interpretación epidemiológica, para identificar los estados de desaparición o persistencia de la enfermedad.
4. Estudiar el comportamiento local de los puntos de equilibrio del modelo mediante la linealización del sistema, con el fin de determinar su estabilidad.
5. Establecer la importancia del número básico de reproducción R_0 en la dinámica del modelo, definiendo su papel como umbral que determina la extinción o permanencia de la enfermedad.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamentos teóricos de la investigación

El desarrollo de modelos matemáticos aplicados a fenómenos epidemiológicos requiere un marco teórico sólido, basado principalmente en las ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDO**), herramienta fundamental en la modelación de sistemas dinámicos. Estas ecuaciones permiten describir cómo evolucionan las variables del sistema en el tiempo, a partir de sus tasas de cambio, y son ampliamente utilizadas para representar procesos naturales, físicos, biológicos y sociales.

En el contexto de las enfermedades infecciosas, las EDO sirven para describir cómo evolucionan en el tiempo las poblaciones de individuos susceptibles e infectadas, capturando el comportamiento temporal de la propagación de una enfermedad bajo distintos supuestos. Específicamente, los modelos tipo SIS (Susceptible-Infectado-Susceptible) emplean sistemas de EDO para representar situaciones donde los individuos, tras infectarse y recuperarse, no desarrollan inmunidad permanente y regresan al estado susceptible.

Dentro del análisis de EDO, uno de los elementos clave para esta investigación es el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio. Entender si un sistema evoluciona hacia un estado estable o si pequeñas perturbaciones pueden alterar su comportamiento a largo plazo resulta crucial para anticipar la persistencia o erradicación de una enfermedad. Este análisis se realiza comúnmente mediante técnicas como la linealización del sistema alrededor de los puntos críticos, el cálculo del jacobiano y la evaluación de los autovalores asociados, los cuales determinan la naturaleza del equilibrio.

Otro concepto clave es el de existencia y unicidad de soluciones, garantizado bajo ciertas condiciones, como la continuidad de la función y la propiedad de Lipschitz. Estos criterios aseguran que el sistema modelado tenga una solución bien definida para condiciones iniciales dadas, lo cual es indispensable para interpretar y validar los resultados del modelo.

Además, en modelos epidemiológicos como el SIS no lineal que se aborda en esta tesis, es esencial verificar propiedades como la positividad y acotamiento de soluciones, lo cual garantiza que las soluciones del modelo se mantengan en rangos biológicamente aceptables.

En esta investigación se trabajará con un modelo SIS no lineal cuya tasa de incidencia adopta una forma cuadrática, es decir, $\beta S^2 I$. Esta forma representa una generalización del modelo clásico, donde la incidencia es simplemente proporcional al producto SI . La inclusión del término S^2 refleja situaciones donde el riesgo de contagio aumenta más rápidamente con la cantidad de susceptibles.

Para sustentar teóricamente este análisis, se recurrirá a autores clásicos y contemporáneos como Benazic (2007), Monzón (2003), Plaat (1974) y López (2006), quienes abordan con profundidad las bases matemáticas necesarias para el estudio de sistemas dinámicos, así como técnicas de análisis de estabilidad aplicadas a modelos no lineales.

En resumen, este capítulo establece los fundamentos necesarios para aplicar con rigor matemático las herramientas de las EDO al análisis de un modelo epidemiológico SIS no lineal, y sentará las bases para las secciones posteriores donde se desarrollarán los resultados analíticos del presente trabajo.

2.2. Bases teóricas

Problema de Valor inicial

Definición 2.1. Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto

- A. Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden relacionada con una función F , se expresa generalmente en la forma:

$$w' = F(z) \tag{2.1}$$

B. Se denomina solución de la ecuación diferencial (2.1) a una función diferenciable $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I , tal que:

- i) $\varphi(t) \in U, \forall t \in I$
- ii) $\varphi'(t) = F(\varphi(t)), \forall t \in I$

Observación 1. Si $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, entonces toda solución φ de la ecuación (2.1) es de clase C^1 .

Observación 2. Consideremos $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ entonces

1. La EDO (2.1) tendrá la forma de un sistema de “n” ecuaciones diferenciales autónomas, como se presenta a continuación:

$$\begin{cases} x'_1(t) = F_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = F_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = F_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

2. Si φ es solución de la EDO (2.2), si y sólo si,

- i) $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in U$, para todo $t \in I$
- ii) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, satisface (1.2) para todo $t \in I$

Definición 2.2. Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $z_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$

1. El problema de valor inicial (PVI) o el problema de Cauchy asociado a f , se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{cases} z'(t) = F(z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

2. Una solución del (PVI) (2.3) es una función $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

- i) $t_0 \in I$
- ii) $\varphi(t) \in U$, para todo $t \in I$
- iii) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, para todo $t \in I$

$$\text{iv)} \quad \varphi(t_0) = z_0$$

Observación 3. Consideremos $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ entonces,

1. Si $w_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ cuando $t_0=0$, tenemos el PVI asociado a F

$$\begin{cases} x'_1(t) = F_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), & x_1(0) = x_1^0 \\ x'_2(t) = F_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), & x_2(0) = x_2^0 \\ \vdots \\ x'_n(t) = F_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), & x_n(0) = x_n^0 \end{cases} \quad (2.4)$$

2. Una solución del PVI (2.4) es una función $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$

tal que cumple lo siguiente:

- i) $0 \in I$, para todo $t \in I$
- ii) $\varphi(t) \in U$, para todo $t \in I$
- iii) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, satisface (2.4) para todo $t \in I$
- iv) $\varphi(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

Existencia y Unicidad

Mencionaremos algunas notaciones previas a los resultados que presentaremos en este capítulo.

Recordando algunas notaciones básicas topológicas que a continuación mencionamos:

Bola abierta ($B_r(z_0)$)

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^n: \|z - z_0\| < r, \quad r > 0\}$$

Bola cerrada ($B_r[z_0]$)

$$B_r[z_0] = \{z \in \mathbb{R}^n: \|z - z_0\| \leq r, \quad r > 0\}$$

Del mismo modo, cuando trabajamos sobre la recta real, utilizaremos la siguiente notación:

Intervalo abierto: $B_r(z_0) = (z_0 - r, z_0 + r)$

Intervalo cerrado: $B_r[z_0] = [z_0 - r, z_0 + r]$

Definición 2.3. Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función definida en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, se dice que F es globalmente Lipschitziana o es Lipschitziana en U , si existe una constante L tal que $z_1, z_2 \in U$

$$\|F(z_1) - F(z_2)\| \leq L\|z_1 - z_2\|$$

A dicha constante L se le conoce como constante de Lipschitz de F en U .

Definición 2.4. Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, se dice que F es localmente Lipschitziana en U si sólo si $z_0 \in U$ existe $a > 0$ tales que $B_a(z_0) \subseteq U$ y la restricción

$$F|_{B_a(z_0)}: B_a(z_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es Lipschitz en $B_a(z_0)$.

Observación 4. Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto:

F es globalmente Lipschitz entonces F es localmente Lipschitz entonces F es continua.

Definición 2.5. sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ tal que $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función.

Decimos que F es de clase C^1 en U si y sólo si, se verifican las siguientes condiciones

- i) $\forall z \in U$, y existen las derivadas parciales $\frac{\partial F_i(z)}{\partial z_j}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$
- ii) $\forall 1 \leq i, j \leq n$ las funciones $\frac{\partial F_i}{\partial z_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en U y lo denotamos como:

$$J(z) = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1(z)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_1(z)}{\partial z_n} \\ \frac{\partial F_2(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial F_2(z)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_2(z)}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial F_n(z)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_n(z)}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

Esta matriz se le conoce como la Matriz Jacobiana de F .

Proposición 2.1. (criterio de Lipschitz para funciones con derivadas acotadas)

Sea I un intervalo real y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en todo I y derivable en el interior de dicho intervalo. Si la derivada de f se encuentra acotada en el interior de I , entonces f cumple la condición de Lipschitz en I .

Demostración. Ver (Maximenko, 2014, p.2)

Proposición 2.2. sea $U \in \mathbb{R}^n$ abierto y F una función de clase C^1 en U . Entonces F es localmente Lipschitz en U .

Prueba. Ver (Benazic, 2007, pp. 171-172)

Lema 2.1. Sea $F: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son continuas y existen $\frac{\partial F_i}{\partial z_j}$ continuas en $\mathbb{R}_+^n \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Entonces, F es localmente Lipschitz continua en \mathbb{R}_+^n .

Prueba. Ver (López, 2006)

Teorema 2.1. Sea $F: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que cumple la condición de ser localmente Lipschitz continua para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y además satisface $F_i(x) \geq 0$ siempre que $x \in \mathbb{R}_+^n, x_i = 0$. Entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, existe una única solución de $x' = F(x)$ con $x(0) = x_0$ en \mathbb{R}_+^n y está definida en algún intervalo $(0, a]$ con $a \in (0; +\infty]$. Si $a < +\infty$; entonces se cumple que

$$\sup_{0 \leq t \leq a} \sum_{i=1}^n x_i(t) = \infty$$

Prueba. Ver (López, 2006)

Proposición 2.3 (Gronwall's lemma)

Sean $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas con $v \geq 0$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Si

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)ds$$

Para todo $t \in [a, b]$, entonces

$$u(t) \leq c \cdot \exp \int_a^t v(s)ds$$

Para todo $t \in [a, b]$.

Prueba. Ver (Barreira & Vals, 2010)

Lema 2.2 Sean $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$ tales que:

$$0 \leq f(x) \leq A + B \int_{x_0}^x f(s)ds \quad \forall x \in I$$

Con A y $B \geq 0$ constantes, entonces

$$f(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales

Al utilizar la notación matricial, es posible expresar de manera más compacta y organizada un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Esta representación resulta particularmente útil al incorporar los resultados teóricos previos, ya que permite trabajar de forma más estructurada con funciones elementales asociadas al sistema en estudio.

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} \quad y \quad F(z) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, el sistema (2.4) tendría la forma siguiente

$$z' = F(z)$$

En consecuencia, es posible utilizar los resultados previamente establecidos.

La expresión general de un sistema lineal autónomo compuesto por n ecuaciones diferenciales ordinarias es la siguiente:

$$\begin{cases} z'_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \cdots + a_{1n}z_n + b_1 \\ z'_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \cdots + a_{2n}z_n + b_2 \\ \vdots \\ z'_n = a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \cdots + a_{nn}z_n + b_n \end{cases}$$

Obsérvese que el sistema (2.4) es de naturaleza lineal, por lo que puede expresarse mediante notación matricial de la forma siguiente.

$$z' = F(z) = Az + b$$

Donde:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Cuando $b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ el sistema se denomina homogéneo, caso contrario, se clasifica como no homogéneo.

Teorema 2.2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces la única solución del PVI

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Esta dado por

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \varphi = e^{(t-t_0)A} z_0 \end{aligned}$$

Prueba. Ver (Benazic, 2007, pp.46-47)

Definición 2.6. Sea $U \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función asociada, a la ecuación diferencial

$$z' = F(z)$$

Un punto $z^* \in \mathbb{R}^n$ se denomina **punto crítico** o **singularidad** si y sólo si, cumple que $F(z^*) = 0$.

A continuación, presentamos algunos resultados fundamentales relacionados con la linealización del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Para esto, sin pérdida de generalidad, consideraremos el siguiente sistema autónomo:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(x_1, x_2) \\ x_2' = F_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad \dots \quad (\theta^*)$$

Con un punto crítico aislado (x_1^*, x_2^*) , es decir

$$F_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Si $F_1(x_1, x_2)$ y $F_2(x_1, x_2)$ admiten su desarrollo mediante las series de Taylor de orden uno alrededor de $z^* = (u^*, v^*)$, tenemos

$$F_1(x_1, x_2) = F_1(z^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(z^*)(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(z^*)(x_2 - x_2^*) + R_1$$

$$F_2(x_1, x_2) = F_2(z^*) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(z^*)(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(z^*)(x_2 - x_2^*) + R_2$$

Luego tenemos

$$F_1(x_1, x_2) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(z^*)(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(z^*)(x_2 - x_2^*) + R_1$$

$$F_2(x_1, x_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(z^*)(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(z^*)(x_2 - x_2^*) + R_2$$

Haciendo un cambio de variable

$$u' = x_1' = F_1(x_1^*, x_2^*)$$

$$v' = x_2' = F_2(x_1^*, x_2^*)$$

Es decir

$$\begin{cases} u' = u \frac{\partial F_1}{\partial x}(z^*) + v \frac{\partial F_1}{\partial y}(z^*) + R_1 \\ v' = u \frac{\partial F_2}{\partial x}(z^*) + v \frac{\partial F_2}{\partial y}(z^*) + R_2 \end{cases} \quad \dots (2.5)$$

Observamos que las derivadas parciales están evaluadas en $z^* = (u^*, v^*)$ por consiguiente son números $R_i(x_1, x_2) = R_i$, $i = 1, 2$ denota el resto de términos en función de x_1, x_2 .

Expresando en su forma matricial, obtenemos lo siguiente

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(z^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(z^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(z^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(z^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad \dots (2.6)$$

Cuando consideramos $|u|$ y $|v|$ suficientemente pequeños o cercanos a cero, podemos despreciar los términos R_i , para $i = 1, 2$ del sistema (2.6), así deducimos que el comportamiento cualitativo del sistema (2.6) cerca al punto crítico (u^*, v^*) es similar al sistema lineal asociado

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(z^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(z^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(z^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(z^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots (2.7)$$

Donde

$$\det(J(z^*)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(z^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(z^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(z^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(z^*) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \dots (2.8)$$

Es la determinante de la matriz jacobiana, del sistema (2.7) evaluada en el punto crítico z^* .

Este proceso de transformar el sistema no lineal (2.6) a un sistema lineal (2.7) se le denomina linealización del sistema (θ^*) en el punto crítico $z^* = (u^*, v^*)$.

Teorema 2.3 : Teorema de Linealización de Liapunov y Poincaré

- i) El punto crítico (u^*, v^*) del sistema (θ^*) es asintóticamente estable si y sólo, todos los valores propios (autovalores) de la matriz Jacobiana J tienen parte real negativa. En otras palabras, esto implica que el punto crítico $(0,0)$ del sistema linealizado (2.7) es asintóticamente estable.
- ii) Por otro lado, el punto crítico (u^*, v^*) es inestable si existe al menos un autovalor de J cuya parte real sea positiva, lo que significa que el punto $(0,0)$ del sistema linealizado es inestable.

Cuando los autovalores de J son distintos entre sí y ninguno es cero, se puede clasificar de la siguiente manera:

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces (u^*, v^*) es un nodo asintóticamente estable.
- Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, el punto es un nodo inestable.
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, se trata de un punto silla.
- Si λ_1 es complejo con parte real negativa, entonces (u^*, v^*) es un foco asintóticamente estable.
- Si λ_1 es complejo con parte real positiva, entonces el punto crítico es un foco inestable.

2.3. Marco conceptual

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Formalmente, un sistema de n Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de primer orden puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\&\vdots\end{aligned}\tag{3}$$

$$x'_n = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En donde t es una variable independiente que denota al tiempo, x_1, x_2, \dots, x_n son variables que dependen de t que toman valores reales y F_1, \dots, F_n son funciones reales definidas en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Si cada una de las funciones F_i para $i = 1, 2, \dots, n$; representa una estructura lineal respecto a las variables x_1, x_2, \dots, x_n el sistema se clasifica como lineal. En caso contrario se le denomina no lineal.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos: La estabilidad en un sistema dinámico se refiere a su capacidad para responder de manera controlada frente a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales o en las variables que influyen en su comportamiento. En términos simples, un sistema se considera estable si, ante perturbaciones mínimas, su evolución temporal permanece cercana a la trayectoria original sin desviarse drásticamente.

En el contexto de sistemas deterministas modelados mediante ecuaciones diferenciales, esta propiedad cobra especial relevancia. Tal como señala Murray (2003), la estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales es reflejo directo de la estabilidad inherente al sistema dinámico que representan.

Estabilidad de un punto de equilibrio:

En el análisis de sistemas dinámicos, un punto de equilibrio se considera estable en el sentido de Lyapunov si cualquier trayectoria que se inicie lo suficientemente cerca de dicho punto permanece próxima a él conforme evoluciona el tiempo. En otras palabras, pequeñas desviaciones iniciales no provocan que el sistema se aleje significativamente del equilibrio. Por el contrario, si las trayectorias tienden a alejarse, se dice que el punto de equilibrio es inestable (Anzures, Padilla & Cuevas, 2008).

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable (Anzurez, Padilla, & Cuevas, 2008).

El **número básico de reproducción**, R_0 , es un concepto de suma importancia en modelos matemáticos de propagación de enfermedades dentro de una población.

El cálculo de este número básico de reproducción R_0 nos determinará precisar el impacto de la enfermedad. Asimismo, el parámetro R_0 es un umbral para la estabilidad. Si $R_0 > 1$, implica el número de individuos infectados aumentará, $R_0 < 1$ la enfermedad se extinguirá a través del tiempo (Van den Driessche y Watmough, 2008).

Modelo SIS.

Algunas infecciones no confieren inmunidad duradera. Con tales infecciones, los individuos vuelven a ser susceptibles una vez que se han recuperado de la enfermedad. Por lo tanto, no existe una clase de recuperados (R) y la población está compuesta por los susceptibles (S) y los infecciosos (I) solamente, es decir, $T = S + I$.

El modelo correspondiente se conoce como el modelo SIS (susceptible/infectado/susceptible) con transmisión vertical (Korobeinikov, 2002).

En nuestra investigación, consideraremos el modelo SIS con dinámica Vital cuyas ecuaciones diferenciales son:

$$(1^*) \begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu T - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S & \dots (1) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I & \dots (2) \end{cases}$$

Donde μT tasa de nacimiento, α y β tasa de muerte natural y tasa de transmisión, γ tasa de pérdida de inmunidad y $\frac{1}{\gamma}$ periodo promedio de inmunidad temporal. Asumimos que el tamaño de la población T es constante.

Modelo SIS con tasa de incidencia no lineal.

Se aplica para enfermedades en las que los individuos no desarrollan inmunidad permanente. En este tipo de infecciones, una vez que una persona se recupera, regresa al grupo de los susceptibles, repitiéndose así el ciclo de contagio. De esta manera, la progresión típica de la enfermedad sigue el esquema: "*susceptible* \rightarrow *infectado* \rightarrow *susceptible*".

En este modelo SIS consideramos la entrada de la tasa de nacimiento (μT) y la salida de la tasa de muerte natural, como se muestra en la figura 1.

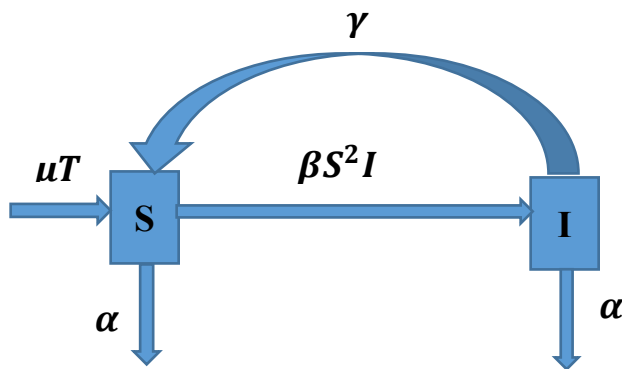


Fig. 1 Diagrama del modelo SIS con dinámica vital.

Cuyo modelo de ecuaciones diferenciales está representado por:

$$(1^*) \begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu T - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S & \dots (1) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I & \dots (2) \end{cases}$$

Donde:

S: número de individuos susceptibles

I: número de individuos infectados en el tiempo t .

μT : Tasa de nacimiento

β : Tasa de trasmisión (número promedio de contactos adecuados para la infección de una persona por unidad de tiempo).

α : Tasa de muerte natural.

γ : Tasa de pérdida de inmunidad.

$\frac{1}{\gamma}$: Período promedio de inmunidad temporal

Interpretación de la derivada

$\frac{dS}{dt}$ significa **Cambio promedio de la población de susceptibles (S) por unidad de tiempo**

(t). Donde μT representa la población susceptible que ingresa al modelo a la cual se le restan las personas que pasan a formar parte de la población de infectados ($\beta S^2 I$). Asimismo, se le suma la proporción de la población infectada que pasa a ser susceptible (γI) y se le resta la población susceptible que muere por causas diferentes a la infección (αS).

$\frac{dI}{dt}$ significa **Cambio promedio de la población de infectados (I) por unidad de**

tiempo (t). La expresión ($\beta S^2 I$) representa a los susceptibles que pasaron a ser infectados a la cual se le resta la expresión (γI), que representa la población que después de ser infectada pasa a ser nuevamente susceptible, y adicionalmente se le resta la población infectada que muere por causas diferentes a la infección αI .

CAPITULO III

III. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Hipótesis central de investigación

H1: El modelo matemático SIS no lineal con término de incidencia βS^2I , que incorpora natalidad y mortalidad, permite su análisis cualitativo garantiza condiciones de existencia, unicidad, positividad y estabilidad de las soluciones.

Hipótesis Específicas

H1.1: El modelo SIS con incidencia no lineal, formulado mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, admite existencia y unicidad de soluciones para condiciones iniciales bien planteadas, lo que asegura que su comportamiento es matemáticamente bien definido.

H1.2: Las soluciones del modelo se mantienen positivas y acotadas en el tiempo.

H1.3: El modelo permite identificar puntos de equilibrio epidemiológicos que representan estados estables de desaparición o persistencia de la enfermedad.

H1.4: Mediante la linealización del sistema en torno a los puntos de equilibrio, se puede determinar la estabilidad local.

H1.5: El número básico de reproducción R_0 actúa como umbral crítico que condiciona si la enfermedad tiende a extinguirse ($R_0 < 1$) o a permanecer de forma endémica ($R_0 > 1$).

3.2. Variables e indicadores de la investigación

3.2.1. Definición conceptual

Variable 1 (VD): Estabilidad de un modelo SIS no lineal

La estabilidad de un sistema dinámico se refiere al comportamiento de sus soluciones ante pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales. En el contexto de modelos

epidemiológicos, implica que el sistema retorne o permanezca cerca de un punto de equilibrio, lo cual permite predecir la evolución de la enfermedad (Strogatz, 2018).

Variable 2 (VI): Sistemas de ecuaciones diferenciales SIS no lineal

La segunda variable independiente hace referencia a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de primer orden. Este sistema se compone de n ecuaciones de la forma general:

$$\begin{aligned}x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{3}$$

En este contexto t es una variable independiente que denota al tiempo, x_1, x_2, \dots, x_n son variables que dependen de t que toman valores reales y F_1, \dots, F_n son funciones reales definidas en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Un sistema se clasifica como lineal si cada función F_i para $i = 1, 2, \dots, n$; son lineales, respecto a las variables x_1, x_2, \dots, x_n , en caso contrario, se consideran no lineal.

En epidemiología el modelo SIS, representan el comportamiento dinámico de poblaciones susceptibles e infectadas, considerando que los individuos pueden reinfectarse tras recuperarse, lo que genera un ciclo constante de transmisión (Brauer y Castillo - Chavez, 2012).

3.2.2. Definición operacional

Variable 1: Estabilidad del modelo SIS no Lineal

Se analizará mediante el cálculo de los puntos de equilibrio del sistema SIS no lineal, el estudio de los autovalores del Jacobiano, y las condiciones en las que el número básico de reproducción R_0 determina la permanencia o erradicación de la enfermedad.

Variable 2:

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales SIS no lineal

Las ecuaciones diferenciales, estas están representadas por derivadas de una función.

En tal sentido una ecuación diferencial, estará representada de la manera siguiente:

$$\frac{df}{dt} = F(t)$$

Donde la ecuación de la izquierda ($F(t)$), nos representa como cambia f a través del tiempo.

Un sistema de ecuaciones diferenciales, está formada por varias ecuaciones diferenciales que representa la dinámica de funciones que se relacionan entre sí.

Por consiguiente, para nuestro trabajo de investigación la representación matemática de nuestro modelo, que contempla una población de Susceptibles (S), una población de Infectados (I), los cuales están relacionados entre sí, el modelo se expresa de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu T - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S \\ \frac{dI}{dt} = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I \end{cases}$$

y se evaluará su estructura mediante análisis cualitativo: existencia, unicidad, positividad, acotamiento y dinámica generada por los parámetros del modelo.

Indicadores

Variable	Dimensión	Indicador
Estabilidad del modelo SIS no lineal	Análisis de equilibrio	puntos de equilibrio
	Estabilidad local	Autovalores de la matriz Jacobiana
	Número básico de reproducción R_0	Determinación del valor crítico de R_0 como umbral
Sistema de ecuaciones SIS no lineal	Existencia y unicidad	Verificación del teorema de existencia y unicidad.
	Positividad y acotamiento	Evaluar que las soluciones se mantienen en el primer cuadrante
	Función de incidencia no lineal	Incidencia del término $\beta S^2 I$ en la reproducción de la tasa de contagio

3.3. Métodos de la investigación

De acuerdo a Baena (2014) la investigación es pura (básica) “es el estudio de un problema, destinado exclusivamente a la búsqueda de conocimiento” (p.11). Por consiguiente, nuestra investigación sobre un modelo SIS no lineal, pues busca ampliar nuevos conocimientos, para incrementar los saberes científicos.

En la presente investigación tendremos en consideración el planteamiento realizado por Gao, Wang, y Liu (2019), Pino (2017) y Bassanezi y Ferreira (1998) teniendo en cuenta las modificaciones realizadas en el sistema trabajado por ellos, para obtener la estabilidad del sistema planteado. Para la obtención de los resultados de nuestros objetivos, recurriremos al uso de textos avanzados de consulta los cuales se mencionan en la bibliografía, así como también artículos relacionados a los temas en estudio, los cuales son citados en la referencia bibliográfica.

3.4. Diseño o esquema de la investigación

La investigación sigue un diseño no experimental. Se estudia un modelo no lineal de la forma (1*), lo que se quiere es el análisis en su comportamiento bajo condiciones previamente establecidas gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.5. Población y muestra

Población: En el contexto de una investigación matemática, la población corresponde al conjunto de todos los posibles modelos epidemiológicos SIS no lineales.

Muestra: Se restringe al modelo específico con incidencia βS^2I , que se analiza en profundidad debido a su pertinencia en estudios epidemiológicos recientes.

3.6. Actividades del proceso investigativo

Las actividades desarrolladas incluyen: revisión bibliográfica sobre modelos SIS y estabilidad, formulación del sistema de ecuaciones, análisis de puntos críticos, linealización, estudio de estabilidad local y análisis de resultados.

3.7. Técnicas e instrumentos de investigación

- Las técnicas empleadas comprenden análisis cualitativo de sistemas dinámicos, derivación y solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Los instrumentos utilizados incluyen artículos científicos de alto impacto, como bibliografía especialidad en la investigación.

3.8. Procedimiento para la recolección de datos

Dado que esta investigación es teórica, la recolección de datos se centra en la obtención de información bibliográfica y en la generación de datos mediante simulaciones numéricas. Las fuentes bibliográficas se seleccionaron siguiendo criterios de actualidad, relevancia y rigurosidad científica.

3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos.

No hubo recolección de datos ya que la investigación es abstracta y solo se realizó el análisis cualitativo permitió validar la hipótesis y extraer conclusiones sobre la estabilidad del sistema.

CAPITULO IV

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo nos centraremos en el análisis cualitativo que garantiza condiciones de existencia, unicidad, positividad y estabilidad de las soluciones, facilitando la identificación de escenarios de erradicación o persistencia de la enfermedad en la población.

4.1. Análisis de los resultados

Existencia y Unicidad

Ahora demostraremos la existencia y unicidad de nuestro modelo matemático SIS no lineal

$$(1^*) \begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S & \dots (1) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I & \dots (2) \end{cases}$$

Donde $\mu T = A$.

Aplicando el Lema 2.1

Sea $F: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(X) = (F_1(x), F_2(x))$, donde S y I son continuas positivas y además $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son continuas.

A continuación, vamos analizar las derivadas parciales de cada función

$$\text{Sea } F_1(S, I) = A - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S \quad \text{y } F_2(S, I) = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} = -2\beta SI - \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial I} = -\beta S^2 + \gamma$$

Por consiguiente, $\frac{\partial F_1}{\partial S}$ y $\frac{\partial F_1}{\partial I}$ son continuas.

$$F_2(S, I) = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial S} = 2\beta SI \quad y \quad \frac{\partial F_2}{\partial I} = \beta S^2 - (\gamma + \alpha)$$

entonces, $\frac{\partial F_2}{\partial S}$ y $\frac{\partial F_2}{\partial I}$ son continuas.

Por ende, se concluye que F cumple con la condición de Lipschitz de manera local en el dominio \mathbb{R}_+^2 .

A continuación, procederemos a demostrar que, bajo ciertas condiciones, el sistema admite una solución única para un problema de valor inicial.

Del teorema 2.1 $F: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ localmente Lipschitz continua en cada componente $j = 1, 2$ y además cumple $F_j(X) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$, $x_j = 0$ entonces, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}_+^2$, existe una única solución del sistema $x' = F(x)$ con $x(0) = x_0$, definida en intervalo $(0, a]$ con $a \in (0, +\infty]$. En caso de que la solución no pueda extenderse indefinidamente, es decir, si $b < +\infty$; entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq a} \sum_{i=1}^n x_i(t) = \infty$$

Comprobación del cumplimiento de las hipótesis del teorema 2.1

➤ Sea $F_1(S, I) = A - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S$, $A = \mu T$

Donde $S = 0, I \geq 0$ entonces

$$F_1(S, I) = A + \gamma I \geq 0$$

➤ Sea $F_2(S, I) = \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I$

Donde $S \geq 0, I = 0$ entonces

$$F_2(S, I) = 0 \geq 0$$

$\therefore F_j(x) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}_+^2$.

Si tenemos que:

$$a < \infty \rightarrow \sup_{0 \leq t \leq a} (S + I) = \infty$$

Supongamos, $a < \infty$ y sea $T = S + I$

$$T' = A - \alpha(S + I) = A - \alpha T$$

Entonces

$$T' = A - \alpha T$$

Integrando

$$\int_0^t T' dt = \int_0^t A dt - \int_0^t \alpha T(S) dS$$

$$T(t) = T(0) + At - \int_0^t \alpha T(S) dS$$

Por el Lema de Gronwall obtenemos:

$$T(t) \leq (At + T(0))e^{-\alpha t} = \frac{At}{e^{\alpha t}} + \frac{T(0)}{e^{\alpha t}}$$

Luego,

$$T(t) \leq \frac{At}{e^{\alpha t}} + \frac{T(0)}{e^{\alpha t}}$$

De esta desigualdad se puede deducir,

$$(a) \quad e^{\alpha t} \geq 1 \rightarrow \frac{T(0)}{e^{\alpha t}} \leq T(0)$$

$$(b) \quad \frac{At}{e^{\alpha t}} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

Es decir, $T(t) \leq (At + T(0))e^{-\alpha t} \quad \forall t \in [0, a)$

Sea $f(t) = At + T(0) \leq K \quad \forall t \in [0, a)$

Como $a < +\infty \rightarrow f(t) \leq K \quad \forall t \in [0, a)$

Luego, $T(t) \leq K$ para algún $K > 0$

$$\text{Sup}(S + I) \leq K \quad \forall t \in [0, a)$$

Luego, $\text{Sup}(S + I) < +\infty \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$

$$\therefore a = \infty$$

Por consiguiente, se concluye que, el sistema (1^*) tiene solución única, y además están definidas en $[0, +\infty)$.

Positividad y acotamiento del modelo

Teorema 4.1: Dado el conjunto

$$\Gamma = \left\{ (S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2 \cup \{0\} : S(t) + I(t) \leq \frac{A}{\alpha}, t \geq 0 \right\}$$

Entonces, dicho conjunto constituye una región positivamente invariante para el sistema (1^*) .

Prueba.

Partimos del Sistema (1^*) y definimos la función auxiliar $T = S + I$, que representa la población total del modelo. Al sumar las dos ecuaciones que componen el sistema, se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = A - \alpha S - \alpha I$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = A - \alpha(S + I)$$

$$\frac{dT}{dt} \leq A - \alpha T \rightarrow \frac{dT}{dt} + \alpha T \leq A$$

$$\frac{d}{dt}[Te^{\alpha t}] \leq Ae^{\alpha t}$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt} [Te^{\alpha t}] dt \leq \int_0^t Ae^{\alpha t} dt$$

$$T(t)e^{\alpha t} - T(0) \leq \frac{A}{\alpha} e^{\alpha t} - \frac{A}{\alpha}$$

$$T(t) \leq \frac{A}{\alpha} + [T(0) - \frac{A}{\alpha}]e^{-\alpha t}$$

$$T(t) \leq \frac{A}{\alpha} \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty$$

Análisis Cualitativo del modelo Matemático SIS

Realizaremos el análisis cualitativo del modelo matemático SIS siendo un método que nos permite saber cómo es su comportamiento a través del tiempo gobernado por la EDO de tipo no lineal, para garantizar su estabilidad de dicho modelo, hallaremos en primer lugar sus puntos críticos.

Puntos de Equilibrio (Puntos críticos)

Dado el sistema (1*) de EDO, los puntos críticos lo hallaremos igualando a cero cada ecuación del sistema, es decir

$$\begin{aligned} A - \beta S^2 I + \gamma I - \alpha S &= 0 & \dots (1) \\ \beta S^2 I - \gamma I - \alpha I &= 0 & \dots (2) \end{aligned}$$

De la ecuación (2):

$$I(\beta S^2 - \gamma - \alpha) = 0$$

$$\text{➤} \quad \text{Para } I = 0 \rightarrow S \neq \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}$$

Reemplazando en (1)

$$A - \alpha S = 0 \rightarrow S = \frac{A}{\alpha}$$

Por lo tanto, se concluye que el sistema (1*) admite un punto de equilibrio libre de enfermedad, el cual se caracteriza por la ausencia total de individuos infectados en la población.

$$E_1^* = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{A}{\alpha}, 0\right)$$

➤ Para: $I \neq 0 \rightarrow S^2 = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ o $S = \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}$... (*₁)

Reemplazando (*₁) en (1) se obtiene

$$I = \frac{A}{\alpha} - \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}$$

Por tanto, el sistema (1*) tiene un punto de equilibrio endémico

$$E_2^* = (S_1^*, I_1^*) = \left(\sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}, \frac{A}{\alpha} - \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}\right)$$

El punto de equilibrio endémico existe si cumple que $I_1^* > 0$

$$\frac{A}{\alpha} - \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}} > 0 \rightarrow A > \alpha \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha+\gamma}} A(0)}_{R_0} > 1$$

Por consiguiente, el punto de equilibrio endémico existe, donde R_0 es el número básico de reproducción.

Existencia de los puntos de equilibrio

Debido que se va modelar poblaciones, es fundamental asegurar que los puntos de equilibrio del modelo epidemiológico SIS sean biológicamente viables, lo que implica garantizar la no negatividad.

$$E_1^* = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{A}{\alpha}, 0\right) \text{ (trivial)}$$

$$E_2^* = (S_1^*, I_1^*) = \left(\sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}, \frac{A}{\alpha} - \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}\right)$$

La presencia del Punto Libre de Infección E_1^* ; resulta evidente, ya que se obtiene al considerar valores estrictamente positivos y diferentes de cero para las variables del modelo. Por otro lado, la existencia del Punto de equilibrio endémico E_2^* está sujeta a una condición clave desde el punto de vista epidemiológico; es decir el número básico de reproducción R_0 debe ser mayor que 1.

Linealización del Sistema

Dado que nos encontramos frente a un sistema de ecuaciones no lineales, resulta conveniente aplicar el proceso de linealización con el propósito de facilitar su análisis cualitativo. Para ello, se procederá al cálculo de la matriz Jacobiana asociada al sistema.

$$J(S_0^*, I_0^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S} & \frac{\partial F_1}{\partial I} \\ \frac{\partial F_2}{\partial S} & \frac{\partial F_2}{\partial I} \end{bmatrix}$$

$$J(S_0^*, I_0^*) = \begin{bmatrix} -2\beta SI - \alpha & -\beta S^2 + \gamma \\ 2\beta SI & \beta S^2 - (\gamma + \alpha) \end{bmatrix}$$

a) Punto libre de infección

El denominado punto libre de infección, representado como E_1^* , corresponde a una situación en la que, en un determinado momento, la población ya no presenta individuos infectados, permaneciendo únicamente los susceptibles.

Este punto de equilibrio resulta clave para comprender el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo.

$$J_1\left(\frac{A}{\alpha}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta S^2 + \gamma \\ 0 & \beta S^2 - (\gamma + \alpha) \end{bmatrix}$$

Donde,

$$\det(J_1 - \lambda I) = 0$$

$$\det(J_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\alpha - \lambda & -\beta S^2 + \gamma \\ 0 & \beta S^2 - (\gamma + \alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Que tiene los siguientes valores propios

$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \lambda_2 = \beta S^2 - (\gamma + \alpha)$$

Dado que $\alpha > 0$, resultando que $\lambda_1 < 0$, ahora analizaremos λ_2

Caso 1:

$$\lambda_2 = \beta S^2 - (\gamma + \alpha) > 0 \rightarrow \underbrace{\frac{\beta S^2}{\gamma + \alpha}}_{R_0} > 1$$

Si $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$ entonces \mathbf{E}_1^* es un punto inestable.

Caso 2:

$$\lambda_2 = \beta S^2 - (\gamma + \alpha) < 0 \rightarrow \underbrace{\frac{\beta S^2}{\gamma + \alpha}}_{R_0} < 1$$

Entonces E_1^* es un punto estable.

Por lo tanto, para que un punto de equilibrio de extinción de enfermedades $(\frac{A}{\alpha}, 0)$ sea

estable, debe cumplirse que

$$S^2 < \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \leftrightarrow S < \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}$$

O equivalentemente

$$\left(\frac{A}{\alpha}\right) < \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}$$

b) Punto endémico E_2^*

La matriz jacobiana evaluada en el punto endémico E_2^* toma la forma siguiente:

$$J_2(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} -2\beta SI - \alpha & -\beta S^2 + \gamma \\ 2\beta SI & \beta S^2 - (\gamma + \alpha) \end{bmatrix}, \quad S^2 = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

$$J_2(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} -2\beta SI - \alpha & -\beta S^2 + \gamma \\ 2\beta SI & 0 \end{bmatrix}$$

Y los valores propios de la matriz J_2 satisfacen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\beta SI - \alpha < 0,$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (\beta S^2 - \gamma)(2\beta SI) = 2\alpha\beta SI > 0$$

Esto implica que λ_1 y λ_2 tienen partes reales negativas.

Por consiguiente,

$$\underbrace{\frac{\beta S^2}{\gamma + \alpha}}_{R_0} > 1$$

En consecuencia, se concluye que el punto E_2^* **presenta estabilidad**.

Una vez culminado el análisis cualitativo del modelo SIS no lineal, en el cual se identificaron los puntos de equilibrio y se establecieron las condiciones que garantizan su estabilidad local, se procede a exponer el siguiente teorema. Este resultado permitirá completar el estudio cualitativo, orientándose hacia la identificación de un escenario epidemiológico en el que la Infección desaparezca de la población.

La conclusión alcanzada en la demostración de este teorema respalda dicha situación y ofrece un marco teórico sólido para comprender la erradicación de la enfermedad.

Teorema 4.2: Definir

$$R_0 = \frac{\beta S^2}{\gamma + \alpha}$$

Entonces, para el Sistema (1*), tenemos

- a) Si $R_0 < 1$, tiene un único punto de equilibrio estable de extinción de enfermedades E_1^* , que implica la extinción de enfermedades.
- b) Si $R_0 > 1$, tiene un equilibrio positivo estable E_2^* , lo que indica la permanencia de la enfermedad.

4.2. Discusión

A continuación, se realiza una comparación de nuestros resultados con diferentes investigaciones previas, modeladas sistema SIS no lineal.

Con respecto a investigaciones nacionales, Salazar (2019) en su investigación trabajo con una incidencia no lineal y examinó cómo la variabilidad temporal en la tasa de contagio afecta la estabilidad de la enfermedad. Utilizó el jacobiano para analizar los autovalores, determinando que pequeños cambios en dichos parámetros pueden modificar el comportamiento del equilibrio libre de infección. Asimismo, en nuestro trabajo también tiene coincidencia ya que se aplica una incidencia no lineal ($\beta S^2 I$), estudiando la estabilidad en los puntos críticos utilizando la linealización mediante el jacobiano, lo que representa un mejor planteamiento para identificar el comportamiento de contagio en contextos de alta densidad o en espacios cerrados.

Por otro lado, Pino (2017) se centró en modelos SI con retardo para enfermedades de transmisión sexual. Este modelo tiene una similitud en su enfoque cualitativo. No obstante, nuestra investigación incorpora una incidencia no lineal ($\beta S^2 I$), lo que representa una evolución en la formulación matemática al capturar mejor el comportamiento de contagio en contextos de alta densidad de susceptibles.

Con respecto a lo internacional, Dos Santos y Cordero (2020) en su estudio aplicó un modelo SIS clásico para modelar la malaria en dos ciudades brasileñas. Utilizo un sistema es lineal, e identifico los puntos de equilibrio y la estimación de los parámetros a través del análisis cualitativo, los cuales se asemejan a nuestra metodología. Sin embargo, nuestro modelo se diferencia al capturar la dinámica no lineal del contagio, permitiendo detectar umbrales de infección más sensibles.

Asimismo, Aguadero (2020), trabajó con un modelo SIS más general que incluye natalidad, mortalidad y parámetros adicionales. En su modelo se centra en buscar el número de reproducción básico y el análisis de estabilidad, semejantes a nuestros propósitos de este estudio. A pesar que nuestro modelo es simple en su estructura, ofrece un enfoque potente y manejable para evaluar la estabilidad a través de la linealización de un sistema no lineal.

Por otro lado, Alpízar (2016) trabajo con un modelo SIS discreto con medidas de control, incorporando probabilidad de infección. Si bien este estudio se centra de manera práctica en salud pública, nuestro trabajo se centra en el análisis cualitativo del modelo SIS no lineal y ver de manera más preciso de las trayectorias del sistema y su comportamiento en el tiempo, lo que complementa el análisis de políticas sanitarias desde un enfoque dinámico.

Por su parte Gao, Wang y Liu (2019) destacan en su investigación sobre el uso de modelos estocásticos con tasas de incidencia no lineales. En este sentido, nuestra investigación puede considerarse una base determinista que podría extenderse en futuras investigaciones hacia

modelos estocásticos, manteniendo la estructura de incidencia no lineal. Además, Francois, Dronnier y André (2020) abordaron modelos SIS de dimensión infinita, lo que representa una generalización compleja. En cambio, nuestro modelo se sitúa como una similitud o aproximación intermedia entre la simplicidad del modelo clásico y la sofisticación de modelos más elaborados, siendo útil para aplicaciones directas en salud pública.

por consiguiente, el presente trabajo ofrece una contribución clara al campo del modelamiento epidemiológico al considerar un término de incidencia cuadrático que mejora la comprensión de la dinámica de enfermedades infecciosas. El análisis cualitativo de este modelo puede ser particularmente valioso en contextos de alta transmisión, donde los efectos de la no linealidad son más pronunciados.

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

- Se demostró que el modelo está bien definido matemáticamente, ya que se verificó condiciones de continuidad y local Lipschitzianidad, el sistema presenta soluciones únicas para condiciones iniciales positivas y que las trayectorias a lo largo del tiempo se comportan de manera consistentes y predecibles.
- Se garantizó la coherencia biológica del modelo, sino que también asegura que la dinámica no diverge, ya que se demostró que las soluciones de las poblaciones susceptibles e infectadas permanecen siempre positivas y limitadas dentro de una región positivamente invariante.

- Se determinaron dos puntos de equilibrio, el primer punto de equilibrio correspondiente a libre de enfermedad, donde no hay infectados a través del tiempo y el segundo correspondiente al equilibrio endémico, donde la enfermedad persiste en la población
- Se determino el número de reproducción básica $R_0 = \frac{\beta S^2}{\gamma + \alpha}$, el cual juega un papel muy importante en este análisis, ya que actúa como un umbral que determina el estado de la enfermedad. Si $R_0 < 1$, la enfermedad tiende a desaparecer.
Si $R_0 > 1$, la enfermedad se establece y se mantiene en la población.
- Se determino la estabilidad local del sistema, mediante el análisis de la matriz jacobiana evaluada en cada punto de equilibrio. Se determino que si $R_0 < 1$, el equilibrio libre de enfermedad es estable, caso contrario si $R_0 > 1$ se concluye un equilibrio endémico.
Esto significa que hay un cambio claro en el comportamiento del sistema dependiendo del valor de R_0 , lo cual es crucial para entender cómo controlar o mitigar la propagación de la enfermedad.
- A diferencia del modelo SIS clásico, este trabajo introduce una no linealidad en la tasa de transmisión, específicamente cuadrática en la densidad de susceptibles. Esta elección permite modelar situaciones donde el riesgo de contagio aumenta más rápidamente en entornos con alta concentración de personas susceptibles. Este tipo de estructura puede ser especialmente útil para estudiar brotes en espacios cerrados o eventos multitudinarios.

5.2. Recomendaciones

- Este trabajo solo se centró en el análisis cualitativo del modelo, se recomienda para futuras investigaciones aplicar el modelo a casos reales prácticos. Esto permitiría ajustar los parámetros con mayor precisión y generar predicciones más útiles para la toma de decisiones sanitarias.

- Se alienta a los profesionales de la salud pública a considerar los umbrales del modelo para definir estrategias como vacunación, aislamiento o campañas informativas, según se supere o no el valor crítico de R_0 .
- Impulsar líneas de investigación orientadas al análisis y simulación de estos sistemas, promoviendo el diálogo entre la matemática y la salud pública.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguadero, I. (2020). *Estudio matemático de modelos epidemiológicos*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza. Obtenido de <https://zaguan.unizar.es/record/98155/files/TAZ-TFG-2020-1936.pdf>
- Alpizar, G. (2016). Análisis de un modelo SIS para el estudio de la dinámica de propagación de la enfermedad al aplicar medidas de control. *Tecnología en Marcha*, 42-50. Obtenido de <https://www.scielo.sa.cr/pdf/tem/v29s2/0379-3982-tem-29-s2-42.pdf>
- Anzures, M., Padilla, G., & Cuevas, S. (2008). Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados. *Revista de Ingeniería eléctrica, electrónica y computación*. Obtenido de https://www.itson.mx/publicaciones/rieeyc/Documents/v5/art2_diciembre2008.pdf
- Baena, G. (2014). *Metodología de la investigación*. México: D.F: Grupo editorial Patria.
- Barreira, L., & Vals, C. (2010). *Ordinary Differential Equations. Qualitative theory*. American Mathematical Society: Committee.
- Bassanezi, R., & Ferreira, W. (1998). *equações diferenciais com aplicações*. Brazil: HARBRA Ltda.
- Benazic, R. (2007). *"Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias"*. Lima : Grupo Editorial FABET.
- Brauer, F., Castillo-Chavez, C., De la Pava, E., Castillo-Garsow, C., Chowel, D., González, P., . . . Moreno, V. (2014). *Modelos de la propagación de enfermedades infecciosas*. Cali, Colombia: Universidad Autónoma de Occidente. Obtenido de <https://www.researchgate.net/publication/269411966>
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology* (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9>
- Dos Santos, L., & Cordero, R. (2020). Modelo Epidemiológico para a Malária nas Cidades de Manaus e Lábrea. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, V.7(N. 1). Obtenido de <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2752/2771>
- Francois , J., Dronnier, D., & André, P. (2020). Un modelo SIS de dimensiones infinitas. *Cornell University*. Obtenido de <https://arxiv.org/abs/2006.08241>
- Gao, N., Wang, X., & Liu, J. (2019). Dinámica de una epidemia estocástica de modelo SIS con tasas de incidencia no lineales. *a Springer Open Journal*, 2-19. Obtenido de <https://advancesindifferenceequations.springeropen.com/articles/10.1186/s13662-019-1980-0>
- Kermack, W., & McKendrick, A. (1997). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 700-721. Obtenido de http://alun.math.ncsu.edu/wp-content/uploads/sites/2/2017/01/kermack_27.pdf

- Korobeinikov, A. (2002). Lyapunov Functions and Global Stability for SIR, SIRS, and SIS Epidemiological Models. *ScienceDirect*, 955-960.
doi:[https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(02\)00069-1](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)00069-1)
- Lajmanovich, A., & Yorke, J. (1976). A deterministic model for gonorrhea in a nonhomogeneous population. *Mathematical Biosciences*, 28(3-4), 221–236.
Obtenido de http://yorke.umd.edu/Yorke_papers_most_cited_and_post2000/1976_02_Lajmanovich_Gergely_%20MathBiosci_Gonorrhea_nonhomogen_pop.pdf
- López, R. (2006). *Structuerd SI Epidemic Models with Applications to HIV Epidemic*. Arizona State University.
- López, R., Vidal, M., & Valdez, W. (2015). *Nociones Básicas de Modelamiento Matemático aplicado a la Epidemiología*. Lima: Ministerio de Salud. Dirección General de Epidemiología.
- Martins de Assis, C. (2020). Um modelo matemático (discreto) de propagação de uma doença no Ensino Médio. *Revista eletrônica de sociedade Brasileira de Matemática*. Obtenido de http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2020/10/art35_vol8_PMO_SBM_2020.pdf
- Maximenko, E. (2014). "Teorema del valor medio (repaso) y funciones Lipschitz continuas". Obtenido de <http://esfm.egormaximenko.com/>
- Monzón, P. (2003). *Notas sobre estabilidad de sistemas dinámicos. Curso de actualización*.
- Murray, J. (2003). *Mathematical Biology I: Spatial models and medical applications*. (Thir edition ed., Vol. Vol 18). Springer.
- Pino, N. (2017). *Análisis y Simulación Numérica de un Modelo Matemático SI con Retardo Discreto para las Enfermedades de Transmisión Sexual*. Tesis de Maestria, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima. Obtenido de <https://hdl.handle.net/20.500.12672/5735>
- Plaat, O. (1974). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Barcelona: Editorial Reverte, S.A.
- Salazar, L. (2019). *Modelamiento matemático de enfermedades infecciosas mediante sistemas tipo SIS con parámetros variables en el tiempo*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (2nd ed.). CRC Press.
<https://doi.org/10.1201/9780429492563>
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2008). *Further notes on the basic reproduction number*. In F. Brauer, P. van den Driessche, & J. Wu (Eds.), *Mathematical Epidemiology* (pp. 159–178). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6_6