UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

ESCUELA DE POSGRADO

Programa de Doctorado en Matemática

Comportamiento caótico de un sistema dinámico discreto

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:
Mg. Uchasara Quispe, Alberto
Código Orcid: 0009-0005-4966-9033
DNI. Nº 24001331

Asesor:
Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milciades
Código ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

Línea de investigación
Ecuaciones diferenciales y análisis numérico

Nuevo Chimbote - PERÚ
2025

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Milton Milciades Cortez Gutiérrez, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: COMPORTAMIENTO CAÓTICO DE UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO, por el magister Alberto Uchasara Quispe, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, marzo del 2024.

....

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
ASESOR
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

Comportamiento Caótico de un Sistema Dinámico Discreto

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

....

Dr. Teodoro Moore Flores
PRESIDENTE
CODIGO ORCID 0000-0002-1755-3459
DNI N° 32763522

....

Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
SECRETARIO
CODIGO ORCID 0000-0002-3198-831X
DNI N° 32966495

....

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
VOCAL
CODIGO ORCID.0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los seis días del mes de marzo del año 2024, siendo las 11:00 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral 032-2024-EPG-UNS de fecha 30.01.2024, conformado por los docentes: Dr. Teodoro Moore Flores (Presidente), Dr. Ernesto Antonio Cedrón León (Secretario), Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada **"COMPORTAMIENTO CAÓTICO DE UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO"** presentado por el tesista Alberto Uchasara Quispe, egresado del programa de **Doctorado en Matemática**.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 101-2024-EPG-UNS de fecha 04 de marzo de 2024.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de DIECIOCHO.

Siendo las 13:00 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

Dr. Teodoro Moore Flores
Presidente

Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
Secretario

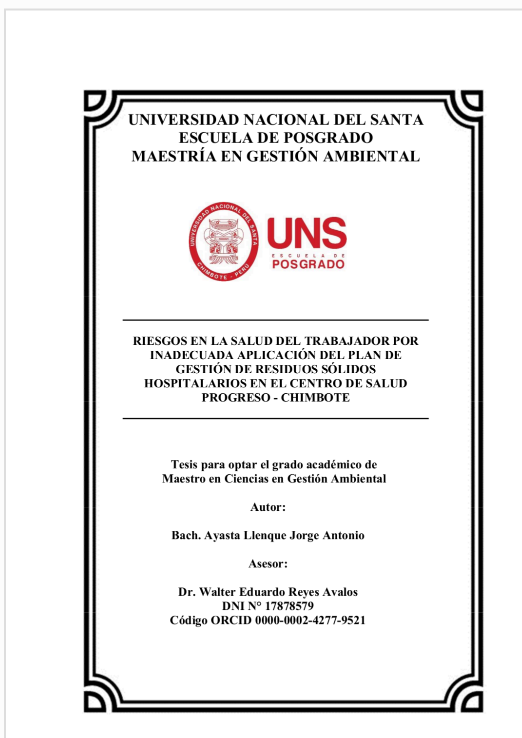
Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
Vocal

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Jorge Antonio Ayasta Llenque
Título del ejercicio:	RIESGOS EN LA SALUD DEL TRABAJADOR POR INADECUADA A...
Título de la entrega:	RIESGOS EN LA SALUD DEL TRABAJADOR POR INADECUADA A...
Nombre del archivo:	TESIS_AYASTA.docx
Tamaño del archivo:	18.84M
Total páginas:	72
Total de palabras:	13,572
Total de caracteres:	77,786
Fecha de entrega:	05-oct-2025 05:21p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega:	2771690835



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN GESTIÓN AMBIENTAL

UNS ESCUELA DE POSGRADO

RIESGOS EN LA SALUD DEL TRABAJADOR POR INADECUADA APLICACIÓN DEL PLAN DE GESTIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS HOSPITALARIOS EN EL CENTRO DE SALUD PROGRESO - CHIMBOTE

Tesis para optar el grado académico de Maestro en Ciencias en Gestión Ambiental

Autor:

Bach. Ayasta Llenque Jorge Antonio

Asesor:

Dr. Walter Eduardo Reyes Avalos
DNI N° 17878579
Código ORCID 0000-0002-4277-9521

RIESGOS EN LA SALUD DEL TRABAJADOR POR INADECUADA APLICACIÓN DEL PLAN DE GESTIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS

INFORME DE ORIGINALIDAD

18%	19%	3%	6%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	www.enmh.ipn.mx Fuente de Internet	6%
2	www.imtunmsm.epiredperu.net Fuente de Internet	5%
3	es.scribd.com Fuente de Internet	4%
4	repositorio.uss.edu.pe Fuente de Internet	2%
5	www.researchgate.net Fuente de Internet	2%

Excluir citas	Apagado	Excluir coincidencias	< 2%
Excluir bibliografía	Apagado		

DEDICATORIA

Dedico este trabajo especialmente a mis padres Félix y Sofía, por su constante apoyo, consejo y comprensión. A mi familia, hermanos y hermanas por su apoyo constante e incondicional y compartir conmigo buenos y malos momentos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer inicialmente a la Universidad Nacional del Santa por la oportunidad que me ha dado para seguir mis estudios de Doctorado en Matemática, así mismo agradecer a mi asesor el Doctor Milton Milciades Cortez Gutiérrez, por su paciencia, guía y su invalorable apoyo en la conclusión del presente trabajo de Tesis. Por otro lado, agradezco a todos mis colegas de promoción por haber compartido todos esos años de estudio virtual, durante el Programa Doctoral, y que Dios nos bendiga el camino cada día de nuestras vidas.

Índice General

Conformidad del asesor………………………………………………………….. ii

Declaración jurada de autoría………………………………............................ iii

Aprobación del Jurado Evaluador……………………………….................... iv

Dedicatoria…………………………………………………………………….. v

Agradecimientos……………………………………………………………. vi

Índice general………………………………………………………………. vii

Resumen……………………………………………………………...…… x

Abstract………………………………………………………...................... xi

INTRODUCCIÓN……………………………………………………………... 12

CAPITULO I……………………………………………………………... 13

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento fundamentación del problema de investigación……………….15

1.2 Antecedentes de la investigación...……………………………………………16

1.3 Formulación del problema de investigación

1.4 Delimitación del estudio……………………..………………………….…17

1.5 Justificación e importancia de la investigación

1.6 Formulación de los Objetivos de la investigación…………………………….18

1.6.1 Objetivo General

1.6.2 Objetivos Específicos

CAPÍTULO II …………………………………………………………………19

MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamentos teóricos de la investigación

2.2 Marco Conceptual

2.2.1 Órbita

2.2.2 Punto de equilibrio…………………………………………..………..20

2.2.3 Órbita periódica

2.2.4 Bifurcación

2.2.5 Caos en el sentido de Li-Yorke………………………………..……..21

2.2.6 Exponente de Lyapunov

2.2.7 Mapeo de la órbita…………………………………………………22

CAPÍTULO III ……………………………………………………….……..23

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Hipótesis central de la investigación

3.2 Variables e indicadores de la investigación

3.3 Métodos de la investigación

3.4 Diseño o esquema de la investigación……………………………….….24

3.5 Población y muestra

3.6 Actividades del proceso investigativo

3.7 Técnicas e instrumentos de la investigación…………………………………25

3.8 Procedimiento para la recolección de datos (Validación y confiabilidad de los instrumentos)

3.9 Técnicas de procesamiento y análisis de los datos……………………….…26

CAPÍTULO IV ……………………………………………………….27

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Introducción.

4.2 Análisis de los datos………………………………………………………29

4.2.1 Comportamiento caótico

4.3 Interpretación de datos……………………………………………………30

4.3.1 Gráfica de exponente de Lyapunov

4.4 Interpretación de los resultados……………………………………….…..31

4.4.1 Diagrama de bifurcación

CAPÍTULO V …………………………………………………………34

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1 Conclusiones……………………………………………………………….35

5.2 Sugerencias

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS……………………………………..………36

Resumen

El presente trabajo de Investigación tiene por objeto analizar el comportamiento caótico de un sistema dinámico discreto, de la forma:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - 5\frac{x_n^2}{4+x_n^2} \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0$$

Donde a es un parámetro positivo, y cuando n crece indefinidamente. Para ello se analiza primero los atractores del sistema dinámico discreto, conjuntamente con la gráfica del exponente de Lyapunov versus el parámetro a. Se analiza que el gráfico de la función Exponente de Lyapunov, para valores del parámetro a en el intervalo: $(3,5)$, tiene una región positiva, lo que se concluye que el sistema dinámico discreto (1) tiene un comportamiento caótico.

Palabras clave: Comportamiento caótico, sistema dinámico discreto.

Abstract

The present research work has a main goal, more precisely analyse the chaotic behaviour of a discrete dynamic system of the form:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - 5\frac{x_n^2}{4+x_n^2} \qquad (2)$$

$$x(0) = x_0$$

Where a is a positive parameter as n goes to infinity. Fort that, first of all, one analyse the atractors for the discrete dynamic system (2), together with the graph of the Lyapunov exponent versus the parameter a. Therefore one see that the graph of the Lyapunov exponent function, where the parameter a belongs to the interval $(3,5)$, has a positive region , which one can assert that the discrete dynamic system (2) has a chaotic behaviour.

Keywords: Chaotic behaviour, discrete dynamical system.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de Investigación intitulado "**COMPORTAMIENTO CAÓTICO DE UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO"** se trata de analizar el comportamiento caótico de un sistema dinámico discreto, mediante la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Como se sabe el caos es un comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico no lineal que nunca cae en trayectorias estáticas o periódicas. El matemático francés Henry Poincaré (1854-1912) trabajó arduamente en lo que respecta a los sistemas dinámicos, tal es que desarrolló herramientas matemáticas en las que demostró que existen orbitas estables e inestables y que una pequeña perturbación en el sistema puede ocasionar un cambio en la naturaleza de la órbita, vale decir causas similares no conducen a efectos similares. Naturalmente, el análisis de dichos sistemas dinámicos son gobernados por ecuaciones diferenciales, y que en general no son lineales y en su mayoría se realiza una simulación de ellas, ya que muchas veces la solución analítica no es posible exhibirla. De modo que se puede afirmar que caos es un estado de desorden y confusión total, así, la teoría del caos estudia el comportamiento de sistemas dinámicos que son altamente sensibles a las condiciones iniciales, como se aprecia en Lorenz, E. (1963) el efecto mariposa, y esto conduce a que algunos sistemas dinámicos tienen la característica de que no se puede realizar una predicción de la evolución del sistema.

Por otro lado, para sistemas no lineales se tiene toda una teoría de existencia de solución tanto global como local dependiendo de ciertas características de los operadores que están enlazados en la ecuación de estado, lo importante es que se pueda tener la estabilidad de dicho sistema, o hasta mismo asintóticamente estable.

En el presente trabajo de investigación, se considera el comportamiento caótico de sistema dinámico discreto de la forma:

$$x_{n+1} = f_a(x_n) \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (2)$$

Donde a es un parámetro. Por otro lado, en el Capítulo I, se trata del problema de investigación, es decir su planteamiento, así como su formulación. Ya en el Capítulo II, se desarrolla el Marco Teórico del trabajo, en el cual se fundamenta el aspecto teórico de la investigación junto con su Marco Conceptual.

Así mismo, en el Capítulo III, se trata del Marco Metodológico, la cual se hace uso de las técnicas e instrumentos de la investigación, por lo que se desarrolla secuencialmente las etapas elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas.

Cabe resaltar que la ciencia usa herramientas matemáticas que facilitan la existencia de solución para problemas que modelan los sistemas dinámicos. Para el trabajo de Investigación en mención se asocia un sistema dinámico discreto. De modo que se rige de un procedimiento de cálculo iterativo.

En el Capítulo IV, se realiza el desarrollo de los resultados y discusión del trabajo de investigación, mediante una aplicación, en el Capítulo III.

Finalmente, el Capítulo V, se logra obtener las conclusiones de los resultados principales obtenidos en el capítulo anterior, además se brinda algunas sugerencias del trabajo de investigación para futuros estudios posteriores.

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el siglo XIX Henry Poincaré demostró que existen tipos de órbitas estables e inestables y que algunas veces una pequeña perturbación en el sistema puede cambiar la naturaleza de las órbitas. Poincaré particularmente examinó el problema de la predicción. Por otro lado, los sistemas son determinísticos y todos estos sistemas son problemas no lineales y que pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales. En los cursos de Análisis se demuestra la existencia de una solución, pero no siempre se puede exhibir dicha solución, es por esa razón que un proceso iterativo y estudiando la convergencia de dichas órbitas se observa el aspecto cualitativo del sistema (Estabilidad e inestabilidad), a medida que se analiza el comportamiento a largo plazo del sistema dinámico discreto, existe una posibilidad de dar origen al caos. El caos puede entenderse como un proceso dinámico en la que se observa su espacio de fase la existencia de estiramientos y dobles(plegados), en un mapa iterativo que nunca cae en trayectorias estáticas o periódicas y de esta manera se genera una sensibilidad a las condiciones iniciales y más aún, el período de la trayectoria del estado del sistema diverge hasta el infinito.

El exponente de Lyapunov constituye una medida de la estabilidad o inestabilidad del comportamiento de los sistemas dinámicos una vez que éstos alcanzan un equilibrio dinámico. Como ya ha sido apuntado en el capítulo 2, los sistemas caóticos, aunque presentan cierta estabilidad en el sentido de que convergen a conjuntos atractores extraños, se caracterizan por su alta dependencia respecto a las condiciones iniciales, esto es, porque su evolución dentro del atractor es altamente inestable. En el primer apartado de este capítulo trataremos precisamente de caracterizar la estabilidad local de las soluciones dentro de los atractores haciendo uso del espectro de exponentes de Lyapunov asociados al sistema.

1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

El área de los sistemas dinámicos ha tenido un intenso estudio a mediados del siglo XIX, con aplicaciones a la dinámica de fluídos, elasticidad no lineal, difusión, mecánica quántica, electrostática, Biología, etc., el crecimiento incesante de la ciencia, motivó el estudio de tales sistemas dinámicos discretos no lineales, tal como se aprecia en, Sanchez Lopez (2011)., Froyland,J. (1992), Holmgren, R. (1994). La teoría del caos muestra la aleatoriedad, la imprevisibilidad como en la trayectoria de una molécula en un gas o hasta mismo el pronóstico del tiempo, lo común en estos sistemas dinámicos discretos es el cambio repentino del estado al que se encuentra, debido a la sensibilidad de las condiciones iniciales y a la forma en que se ponen en movimiento. Por ejemplo, el meteorólogo Lorenz,E.(1963), descubrió que un modelo simple de convección de calor posee imprevisibilidad intrínseca, una circunstancia que llamó el "efecto mariposa", lo que sugiere que el mero aleteo del ala de una mariposa puede cambiar el clima.

El problema de investigación tiene el siguiente planteamiento: Analizar el comportamiento caótico del sistema dinámico discreto no lineal de la forma:

$$x_{n+1} = f_{\boldsymbol{a}}(x_n) \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (2)$$

Donde, x_0 denota la condición inicial en $\mathbb{R}$. $x_n \in \mathbb{R}$, denotará la composición de una cierta función dependiente de un parámetro $\boldsymbol{a}$ consigo mismo $(n-1)$ veces, lo que resulta de considerar la ecuación (1). Y el análisis está en base a un periódo de tiempo suficientemente largo, lo que se entiende como comportamiento asintótico del sistema.

1.2. Antecedentes de la investigación

En relación al tema de los sistemas dinámicos discretos no lineales, existen trabajos recientemente introducidos en la literatura especializada como puede verse en Effah-Poku , S., W. Obeng-Denteh, and I. K. Dontwi,(2018), Kulkarni P.R. and V. C. Borkar,(2015), Fatiou, A.(2005), así como los pioneros Li,T. and J. A. Yorke, (1975), Banks, J. ,Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey(1992). Cabe mencionar que todos ellos analizan el tipo de caos de un sistema dinámico discreto y estudian su comportamiento asintótico.

1.3. Formulación del problema de investigación

En el presente proyecto de investigación se abordará el estudio dando respuesta a la interrogante ¿Existe comportamiento caótico para un sistema dinámico discreto?

Más precisamente para el modelo:

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) - 5\,x_n^2/(4+x_n^2) \tag{3}$$

$$x(0) = x_0 \tag{4}$$

1.4. Delimitación del estudio

El estudio del presente trabajo de Tesis está delimitado básicamente al desarrollo del mapeo en el espacio de fase, así como los atractores y su análisis del comportamiento caótico para el sistema dinámico discreto (3)-(4).

1.5. Justificación e importancia de la investigación

La presente investigación se justifica porque su importancia está basada en los problemas de la ciencia e ingeniería, precisamente modelos gobernados por sistemas dinámicos discretos no lineales, tal como se aprecia en Hao, B.(1989), Takashi Tsuchiya and Daisuke Yamagishi (1997). En lo que respecta a estos modelos se tiene como estudio principal el sistema dinámico discreto:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - 5\, x_n^2/(4 + x_n^2) \tag{5}$$

$$x(0) = x_0 \tag{6}$$

Por otro lado. La teoría de juegos está vinculada a la dinámica no lineal. Una de las muchas contribuciones, ha hecho a la ciencia en general es que demostró formas de modelar y analizar el comportamiento humano con gran rigor, que ha hecho enormes influencias sobre economía, ciencias políticas, psicología y otras áreas de las ciencias sociales, así como también a la ecología y la biología evolutiva.

Adicionalmente, las redes neurales y el comportamiento colectivo son fuentes de investigación más actuales de la ciencia de los sistemas dinámicos conocido durante mucho tiempo como teoría de grafos.

Así mismo también se observan en la biología y medicina, más precisamente en la ecología del comportamiento, epidemiología, neurociencia y otras áreas. Se sigue investigando aún más a medida que aumente la comprensión de la dinámica colectiva de los sistemas dinámicos.

1.6. Objetivos de la investigación:

1.6.1 Objetivo General

Analizar del comportamiento caótico de un sistema dinámico discreto, la que se adjuntará a dicho sistema el aspecto cualitativo, de modo que verifique ciertas propiedades y de esta manera pueda garantizar dicho comportamiento caótico a largo plazo.

1.6.2 Objetivos Específicos

- Determinar los atractores del sistema dinámico discreto (5)-(6).
- Analizar el valor del parámetro a que origina el comportamiento caótico del sistema dinámico discreto (5)-(6).
- Graficar el exponente de Lyapunov versus el parámetro a para el sistema dinámico discreto (5)-(6).

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamentos teóricos de la investigación

Los sistemas dinámicos aparecen en la modelación de fenómenos que ocurren naturalmente. Problemas como la simulación de iteraciones planetarias, dinámica de fluidos, reacciones químicas, formación de cadenas biológicas, todas ellas pueden ser modelados como un sistema dinámico discreto, vale decir como una función, la cual puede ser compuesta consigo misma cada vez y en forma sucesiva. Por ejemplo, si se tiene La función $f(x) = -x^3$, y se realiza las diversas iteraciones consigo misma se consigue $f^n(x) = (-1)^n x^{3n}$, y se desea analizar precisamente cuando n crece indefinidamente. Este comportamiento de los puntos bajo iteración de la función se denomina dinámica de la función.

Dada una función $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in N$, la que se denomina función de iteración, una ecuación en diferencias de orden n en forma explícita viene a ser una ecuación de la forma: $x_{k+1} = F(x_{k-n+1}, x_{k-n+2}, \cdots, x_k)$. De modo que la sucesión $\{x_k\}\ k \geq 1$, con $x_k \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación en diferencias si al reemplazar se verifica la igualdad, ésta la satisface. En efecto, si se tiene la siguiente ecuación en diferencia $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ de orden 2, se verifica que la sucesión: $x_n = 2^n + 1$, $n \geq 1$ es una solución. Existen métodos matriciales que también permiten resolver una ecuación en diferencias dependiendo de la forma que tome F. En el presente trabajo de investigación, el sistema dinámico discreto (5)-(6), tiene su estudio de modo general en la Biología, como una variante de la aplicación de la logística.

La aplicación logística o ecuación logística es una relación de recurrencia que se hizo muy conocida en 1976 gracias a un artículo científico del Biólogo

May, R.(1973) y que fue estudiada más en profundidad por el físico Feigenbaum, M. (1976). La cual explica la dinámica de una población en la que se ha supuesto que tiene un crecimiento cada vez más lento a medida que se acerca a una cantidad de individuos considerada como límite.

En el presente trabajo de investigación,1.3 sigue el siguiente marco teórico

- Órbita de un sistema dinámico discreto.
- Exponente de Lyapunov
- Bifurcación
- Atractores de un sistema dinámico discreto
- Gráfica que ilustra el comportamiento caótico

En los cuales se precisarán de manera adecuada los resultados que permitan resolver el problema planteado. También se considerarán algunos preliminares originales que puedan sustentar las hipótesis a plantear en el estudio del sistema dinámico discreto (5)-(6)

2.2 Marco Conceptual

2.2.1 Orbita

Sea $f: I \to I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ una aplicación, las iteraciones de la función f en un punto x_0 consigo mismo, una, dos veces y en general n veces, forma la composición n veces de f, y se denota por $f^n(x_0) = x_n$.

Es decir, se tiene la siguiente ecuación de diferencias o recurrencia:

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (2.1)$$

Definición 1.-La orbita de un punto $x_0 \in I$, es el conjunto

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$$

Los elementos individuales de la órbita x_n, representan el camino de la iteración, estos representan la trayectoria de la función o lo que se denomina el sistema dinámico discreto.

EJEMPLO 1

Considere la función $f(x) = x^2$, se deduce que la órbita de $x = 1/2$ es:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^{2n}}, \dots\right\}$$

Del punto de vista de su dinámica discreta, viene dada por:

$$x_{n+1} = {x_n}^2$$

Consecuentemente su órbita de un punto x está dada por el conjunto

$$\{x, x^2, x^4, \dots, x^{2n}, \dots\}$$

2.2.2 Puntos de equilibrio

Definición 2.- Se define puntos de equilibrio (puntos fijos o estados estacionarios) del sistema dinámico (2.1) como la solución de la ecuación:

$$x_e = f(x_e) \qquad (2.2)$$

El conjunto de puntos fijos de f se denota por $fix(f)$, es decir

$$fix(f) = \{x \in R; f(x) = x\}$$

EJEMPLO 1

La función identidad $f(x) = x$, entonces se deduce que $fix(f) = R$,

EJEMPLO 2

Dada La función $f(x) = x^3$, entonces se deduce que

$$fix(f) = \{-1,0,1\}$$

Para analizar la estabilidad dinámico discreto (2.1) se realiza una pequeña perturbación del punto de equilibrio $\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_e$, luego en la ecuación (2.1), se obtiene:

$$\Delta x_{n+1} + x_e = f(\Delta x_n + x_e)$$

el lado derecho se puede aproximar usando el Teorema de Taylor alrededor de Δx_n, para conseguir:

$$\Delta x_{n+1} + x_e \approx f(x_e) + f'(x_e)\Delta x_n$$

Lo que implica:

$$\Delta x_{n+1} \approx f'(x_e)\Delta x_n \qquad (2.3)$$

i) Si $|f'(x_e)| > 1$, x_e es un punto de equilibrio inestable (Repulsor)

ii) Si $|f'(x_e)| < 1$, x_e es un punto de equilibrio estable (Atractor)

iii) Si $|f'(x_e)| = 1$, x_e es un punto neutral o indiferente.

2.2.3 Orbita periódica

Definición 3.- x_p es un punto periódico de período m si

$$f^m(x_p) = x_p$$

Es decir x_p es un punto fijo de f^m. La órbita periódica de x_p, es el conjunto de todas las iteraciones dada por:

$$\{x_p, f(x_p), f^2(x_p), \dots f^{m-1}(x_p)\}$$

Donde m es el menor entero positivo.

EJEMPLO 1

La función $f(x) = -x$ en R, tiene un único punto fijo $x = 0$, los otros puntos tienen periodo 2. En efecto , para $x \neq 0$

$$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(-x) = x$$

EJEMPLO 2

La función $f(x) = x^2 - 1$ en R, el punto $x = 0$, es periódico de periodo 2. En efecto , para $x = 0$

$$f^2(0) = f\big(f(0)\big) = f(-1) = 0 \quad , \qquad f(0) = -1$$

Luego la órbita periódica de 0 es el conjunto:

$$\{0, -1\}$$

Por otro lado para $x = -1$ es periódico de periodo 2. En efecto

$$f^2(-1) = f\big(f(-1)\big) = f(0) = -1 \quad , f(-1) = 0$$

Luego la órbita periódica de -1 es el mismo conjunto dado anteriormente:

$$\{-1,0\}$$

2.2.4 Bifurcación

Definición 4.- La bifurcación es un cambio topológico cualitativo del espacio de fase de un sistema dinámico $x_{n+1} = f_a(x_n)$ que se origina cuando algunos parámetros de dicho sistema varían ligeramente a través de sus puntos críticos.

Más precisamente, existe una bifurcación en a_0, si existe un $\delta > 0$ tal que si c y d satisfacen $a_0 - \delta < c < a_0$ y $a_0 < d < a_0 + \delta$, entonces las dinámicas de f_c son diferentes de las dinámicas de f_d. Es decir, la dinámica de la función cambia cuando el valor del parámetro cruza através el punto a_0.

EJEMPLO 1

Considere $x_{n+1} = x_n^2 + a$, analizando el parámetro $a \in R$, se tiene lo siguiente:

Para $a < 0$ se deduce dos puntos de equilibrio

Si $a = 0$ se deduce un único punto de equilibrio $x_n = 0$

Por otro lado para $a > 0$ no se tiene ningún punto de equilibrio.

El diagrama de bifurcaciones se puede apreciar en la siguiente Fig.1a

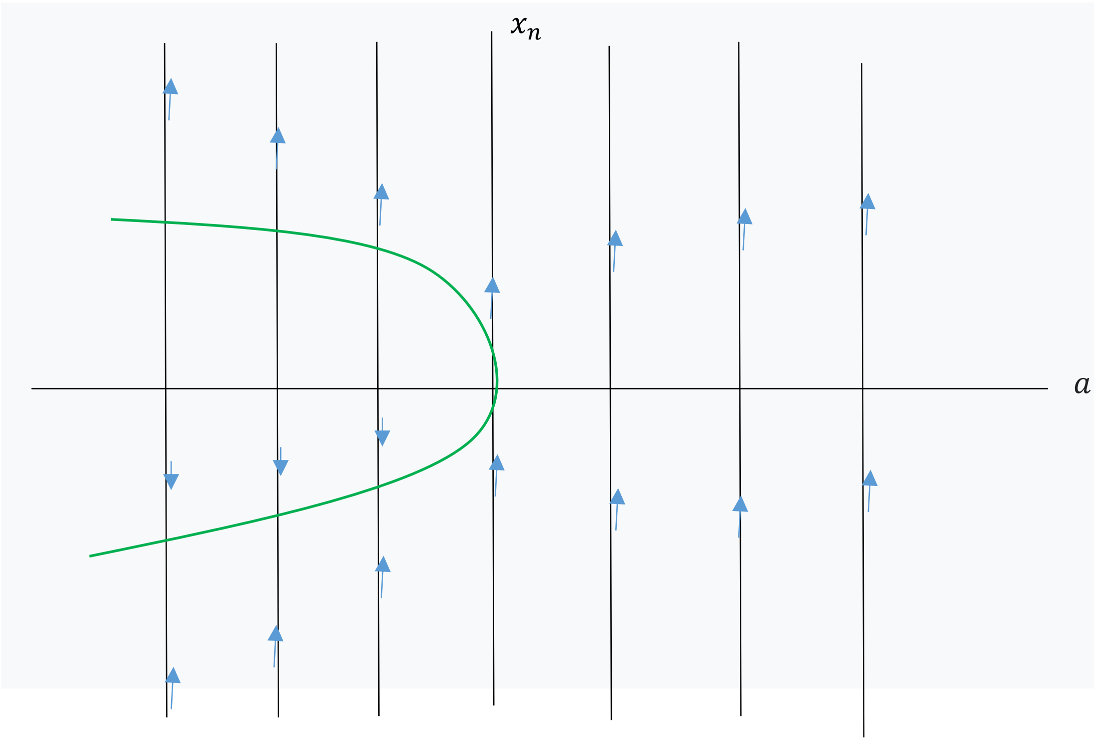


Fig.1a

De modo que para $a < 0$ se obtenien soluciones de equilibrio positivas que serían los repulsores y las soluciones de equilibrio negativas que son los atractores, mientras que para $a = 0$ en el nodo (0,0) es el punto de bifurcación. Note que para $a > 0$ no existen soluciones de equilibrio.

2.2.5 Caos en el sentido de Li-Yorke

Definición 5.- Un sistema dinámico continuo $f: I \to I$ definido en un intervalo acotado es caótico en I si f tiene un punto periódico en I de período tres.

2.2.6 El exponente de Lyapunov

Definición 6.- Sea f_a una aplicación regular. El exponente de Lyapunov $h(a)$ está definido por:

$$h(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln|f_a'(x_i)|$$

caso exista el límite**.**

Definición 7.- Una bifurcación de doble período en un sistema dinámico, es una bifurcación la cual, el sistema cambia a un nuevo comportamiento con dos veces el período del sistema original.

Definición 8.-Sea f_a una aplicación de clase C^3, satisfaciendo:

1) $f_0(0) = 0$

2) $\frac{\partial f_0(0)}{\partial x} = -1$

3) $\frac{\partial^2 f_0(0)}{\partial x^2} < 0$

4) $\frac{\partial^3 f_0(0)}{\partial x^3} = 0,$

Entonces existen intervalos $(a_1, 0)$, $(0, a_2)$ y $\delta > 0$, tal que

i) Si $a \in (a_1, 0)$, entonces $f_a(x)$ tiene un punto fijo estable para todo $x \in (-\delta, \delta)$.

ii) Si $a \in (0, a_2)$, entonces $f_a(x)$ tiene un punto fijo inestable y una órbita estable de período 2, para todo $x \in (-\delta, \delta)$.

Este tipo de bifurcación se conoce con el nombre de bifurcación de doble período.

Algunas propiedades:

1) Sea f_a una aplicación continua, tal que tiene un punto periódico de periodo tres. Entonces f_a tiene punto periódico de todos los otros períodos.
2) Si al menos una de las medias del exponente de Lyapunov es positivo, entonces el sistema dinámico es caótico.
3) Si la media del exponente de Lyapunov es negativo, entonces la órbita es periódica.
4) Si la media del exponente de Lyapunov es cero, entonces una bifurcación ocurre.

2.2.7 Mapeo de la órbita

Es la gráfica del sistema dinámico $x_{n+1} = f_a(x_n)$ en un plano cuyo eje de abscisa es x_n y de eje ordenada $f_a(x_n)$.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe la metodología utilizada en las diferentes etapas del estudio y los instrumentos de recolección de datos utilizados, para analizar el sistema dinámico

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - 5\, x_n^2/(4 + x_n^2) \qquad (3.1)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (3.2)$$

Inicialmente se define las órbitas, seguidamente, los puntos de equilibrio, sistema caótico en el sentido de Li-York.

3.1 Hipótesis central de la investigación

El sistema dinámico discreto (3.1) tiene una ruta al caos.

3.2 Variables e indicadores de la investigación

Variable Independiente : SISTEMA DINÁMICO DISCRETO

Variable Dependiente : COMPORTAMIENTO CAÓTICO

3.3 Métodos de la investigación

El método de investigación es hipotético deductivo, puesto que se obtiene los resultados elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas. Consecuentemente se llega a las conclusiones a través de un procedimiento de cálculo formal, es decir, usaremos las herramientas matemáticas como son: simulación del modelo planteado, de esta forma implicará la contrastación de las hipótesis, (El sistema dinámico discreto (3.1) tiene una ruta al caos), más precisamente, el análisis del comportamiento caótico del sistema dinámico discreto.

Por otro lado, la investigación es del tipo básica, puesto que busca ampliar los conocimientos y teorías que relacionan con otros temas como es la teoría de fractales en ecuaciones diferenciales ordinarias. Así mismo de acuerdo al grado de manipulación de las variables, se trata de una investigación no experimental y por el tiempo que se realiza, es una investigación Transversal, puesto que se hizo un acopio de información en base a revistas y/o artículos especializados durante todo el trabajo de investigación.

3.4 Diseño o esquema de la investigación

Para contrastar la hipótesis de la investigación se ha aplicado la teoría del caos según Li-York, de modo a establecer una relación entre la variable independiente (sistema dinámico discreto) con la variable dependiente (Comportamiento caótico)

3.5 Población y muestra

El presente trabajo de investigación está limitado a una población definida precisamente por los sistemas dinámicos discretos unidimensionales. Mientras que para la muestra se considera el modelo planteado por el sistema dinámico (3.1).

3.6 Actividades del proceso investigativo

Etapas de la investigación con sus correspondientes técnicas e instrumentos de recolección consta de las siguientes fases:

- FASE INICIAL

  En esta fase se realizó un trabajo descriptivo y exploratorio de los datos y /o herramientas a estudiar. Luego se recopiló la información de manera más completa de revistas y/o artículos especializados, que permitió describir el método de estudio y las herramientas que se utilizaron para el presente trabajo de investigación.

- FASE INTERMEDIA

  En esta fase se realizó las iteraciones correspondientes del sistema dinámico discreto no lineal (3.1) y se determinó el número de exponente.

- FASE FINAL

  Se realizó la contrastación de las hipótesis mediante una simulación de la gráfica del exponente de Lyapunov versus el parámetro del sistema dinámico (3.1).

Consecuentemente, se analizó que para ciertos valores del parámetro a, se tiene una región del caos, contribuyendo de esta manera con el objetivo central.

3.7 Técnicas e instrumentos de la investigación

Los datos han sido obtenidos en base a revistas especializadas y/o artículos sobre el tema en cuestión.

- Para la variable independiente (**SISTEMA DINÁMICO DISCRETO)** se ha revisado los temas relacionados con el trabajo de investigación que lo involucran en base al marco teórico y el cálculo formal y lógico.
- Para la variable dependiente (**COMPORTAMIENTO CAÓTICO**) se relacionó con otros trabajos que aplican el exponente de Lyapunov, de modo a enfocar el método con mayor eficiencia para el trabajo de investigación.

- Validación de los Instrumentos

  La validación de los instrumentos se hizo a través de propiedades cualitativas que conducen una ruta al caos. y garantizar de esta manera el comportamiento caótico del sistema dinámico (3.1).

3.8 Procedimiento para la recolección de datos (Validación y confiabilidad de los instrumentos)

La validación de los datos recopilados en el presente trabajo de investigación se valida por la Universidad Nacional del Santa como Universidad Licenciada por la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU).

3.9 Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

Para el procesamiento y análisis de los datos tomados respecto a las variables: comportamiento caótico de un sistema dinámico discreto se han considerado básicamente en la búsqueda de los puntos de equilibrio, puntos fijos periódicos, bifurcaciones, exponente de Lyapunov del sistema dinámico discreto, mediante la revisión de bibliografía especializada, es decir libros y artículos de la materia. Utilizando resultados de la teoría del caos.

Evidentemente se hizo uso de algunos cálculos iterativos de la ecuación (3.1) para ciertos valores del parámetro a , encontrando los puntos fijos correspondientes, resultando algunos como estables en el sentido de Lyapunov. El proceso de inestabilización y naturalmente el origen de nuevos ciclos límite (hacia los que puede tender una solución) con desdoblamiento, bifurcación o duplicación del período continúa a medida que se va incrementando el valor del parámetro de control a.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Introducción

En esta sesión se presenta un análisis e interpretación de datos, en base a la metodología que se presentó en los capítulos anteriores para analizar el comportamiento caótico de un sistema dinámico discreto, más precisamente el siguiente sistema dinámico:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - 5\,x_n^2/(4 + x_n^2) \qquad (4.1)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (4.2)$$

Donde: x_n , denota la n-ésima iteración y $a \in [0,5]$ es un parámetro.

Por ejemplo, para $a = 3.8$ y condición inicial $x_0 = 0.5$ las 20 iteraciones de la ecuación (4.1) son:

$$\{0.5, 0.6559\,, 0.3722\,, 0.7206\,, 0.1907\,, 0.5414\,, 0.6021\,, 0.4949\,, 0.6614, 0.3581\,, 0.7182\,,$$
$$, 0.1981\,, 0.5550\,, 0.5810\,, 0.5360, 0.6101\,\,, 0.4783\,, 0.6777, 0.3151\,, 0.6990\}$$

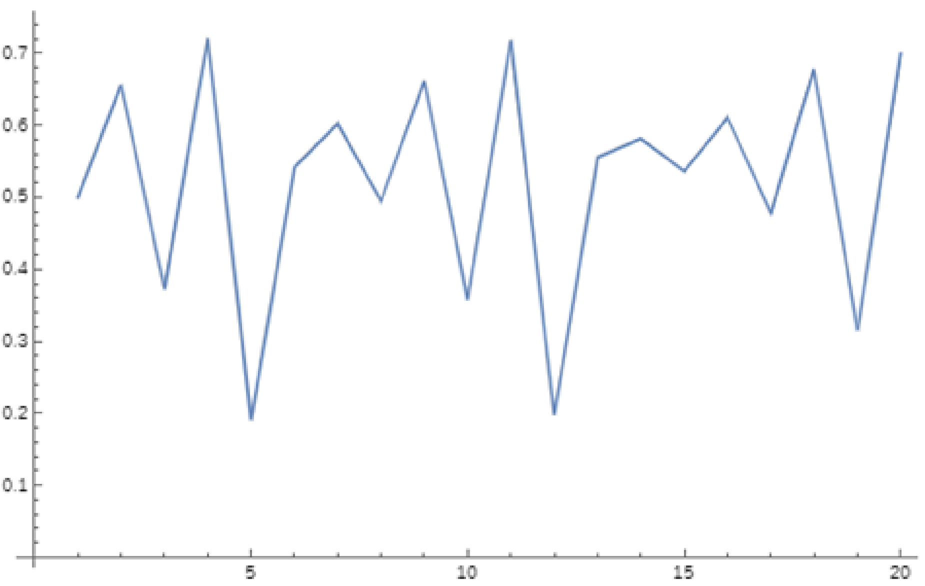


Fig.1 Gráfico de 20 iteraciones, Condición inicial $x_0 = 0.5$

Si se considera otra condición inicial $x_0 = 0.50001$,se tiene las siguientes 20 iteraciones:

```
{0.5000,0.6559,0.3722,0.7206,0.1907,0.5414,0.6021,0.4949,0.6615,0.3580,0.7181
,0.1982,0.5552,0.5807,0.5365,0.6093,0.4800,0.6762,0.3192,0.7016}
```

Cuya gráfica es:

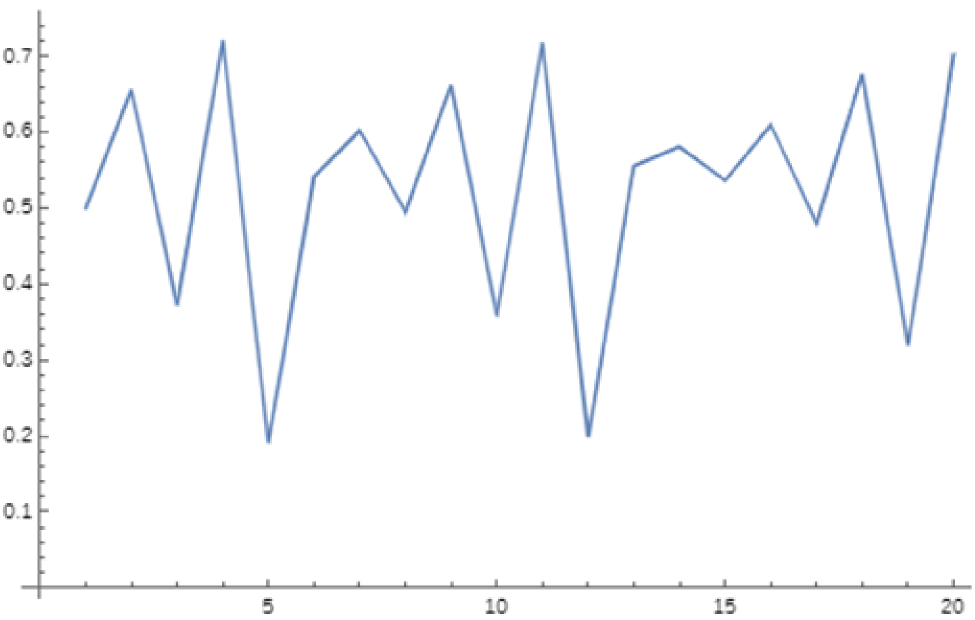


Fig.2 Gráfico de 20 iteraciones, Condición inicial $x_0 = 0.50001$

Por otro lado, al calcular la diferencia de sus gráficas, se obtienen los puntos:

```
{0.000,-0.000,0.000,0.000,-0.000,-0.000,0.000,-0.0001,0.0001,-0.0001,-
0.0000    ,0.0001,0.0002,-0.0003,0.0005,-0.0008,0.0017,-
0.0015,0.0041,0.0026},
```

además, su gráfica resulta:

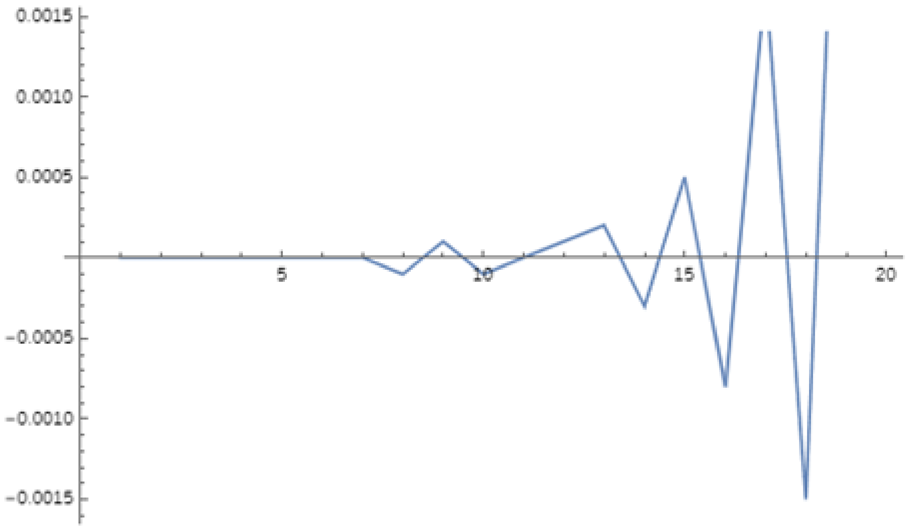


Fig.3. Diferencias de las dos gráficas de la Fig.1 y Fig.2

En la Fig3, se muestra que las trayectorias que solucionan la ecuación (4.1), manifiestan una sensibilidad a las condiciones iniciales, más precisamente son inestables. Se observa que, en un determinado tiempo ambas soluciones evolucionan juntas, y divergen rápidamente en su comportamiento con el correr del tiempo.

4.2 Análisis de datos

4.2.1 Comportamiento caótico

En esta sesión se desarrolla un análisis del parámetro $a \in [0,5]$ de la ecuación (4.1), cuyos puntos de equilibrio para cada valor del parámetro a , originará cambios cualitativos en la dinámica y su comportamiento está sujeto a una subdivisión o ramificación, más precisamente se tendrá un valor de bifurcación.

1) Para $0 < a < 1$, la ecuación (4.1), tiene un único punto fijo, $x_0 = 0$.

Es decir, $x_0 = 0$, es un atractor (estable), puesto que

$$f_a'(0) = a < 1$$

2) Para $1 < a < 3$, tome $a = 2$, la ecuación (4.1), tiene dos puntos fijos,

$x_0 = 0$, $x_0 = 0.31$

$f_a'(0) = a > 1, x_0 = 0$, es un repulsor (inestable)

$f_a'(0.31) < 1,\ x_0 = 0.31$, es un atractor (estable)

3) Para $3 < a < 5$, tome $a = 3.8$, la ecuación (4.1), tiene dos puntos fijos,

$x_0 = 0$, $x_0 = 0.56478$, ambos puntos son repulsores,

$$f_a'(0) = a > 1 \ , \qquad |f_a'(0.56478)| = |-1.70342| > 1$$

Tomando $a = 3.88$, la ecuación (4.1), tiene dos puntos fijos, $x_0 = 0$, $x_0 = 0.57194$, ambos puntos son repulsores. Por otro lado, los puntos periódicos para $f_a^3(x_e) = (x_e)$, con $a = 3.88$ son dados por:

$$x_0 = 0.10444, \qquad x_0 = 0.13692$$

Lo que se concluye según Li-Yorke hay un comportamiento caótico.

4.3 Interpretación de datos

4.3.1. Gráfica de exponente de Lyapunov

En este caso el gráfico de la función para los valores del parámetro a en el intervalo: (3,5). Un exponente de Lyapunov positivo indica comportamiento caótico, tal como se aprecia en la fig.4

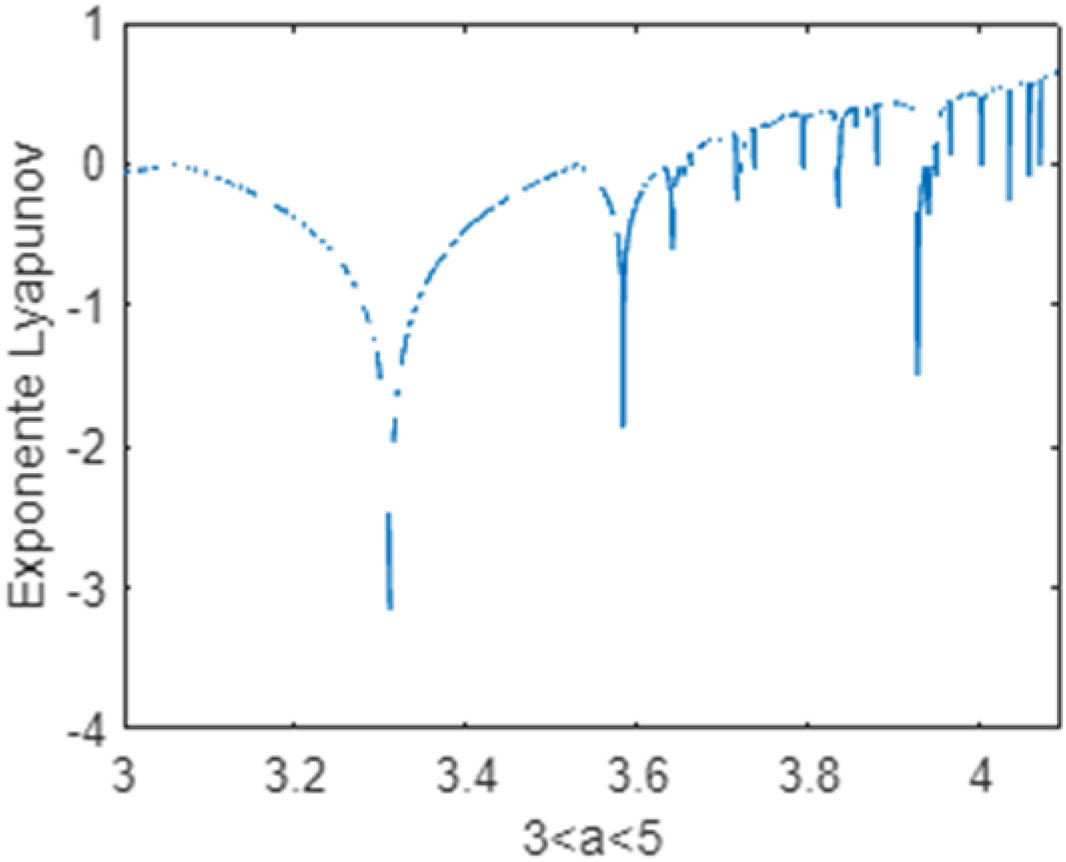


Fig.4. Exponente de Lyapunov con una región positiva.

4.4 Interpretación de los resultados.

4.4.1 Diagrama de bifurcación

Cuando se varía los valores del parámetro $0 < a < 1$, todos los puntos son plotados en cero, y como se vio anteriormente es el único punto estable (atractor). Mientras que para $1 < a < 3.2$, se tiene un atractor, las bifurcaciones se observa cuando se tienen los valores de $a = 3.2$, $a = 3.6$, 3.7 , $3,72$, 3.729 aproximadamente.

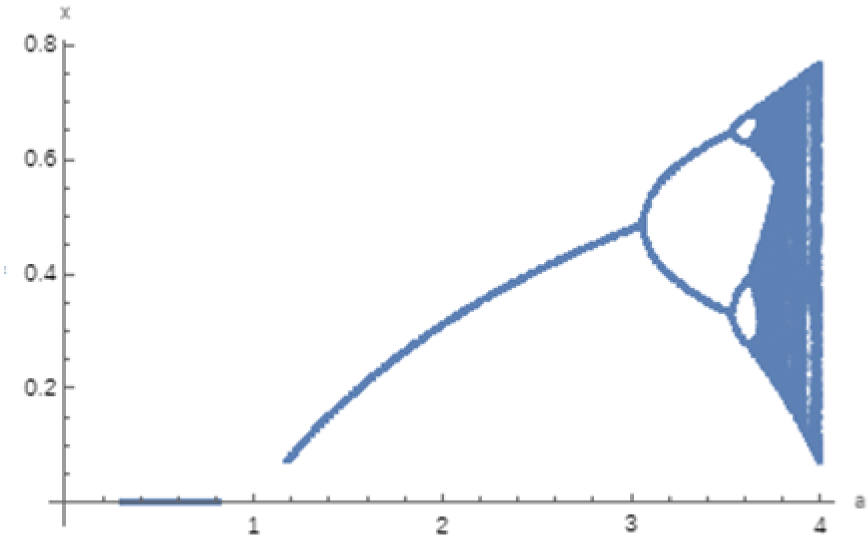


Fig.5. Diagrama de bifurcación para $0.3 < a < 4$

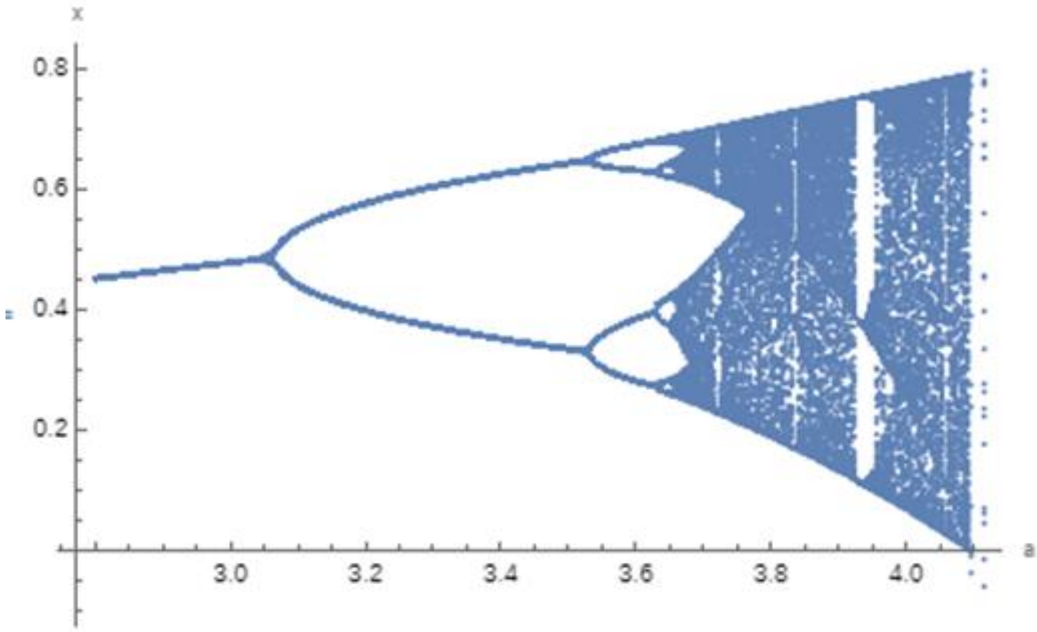


Fig.6. Diagrama de bifurcación para $2.8 < a < 5$

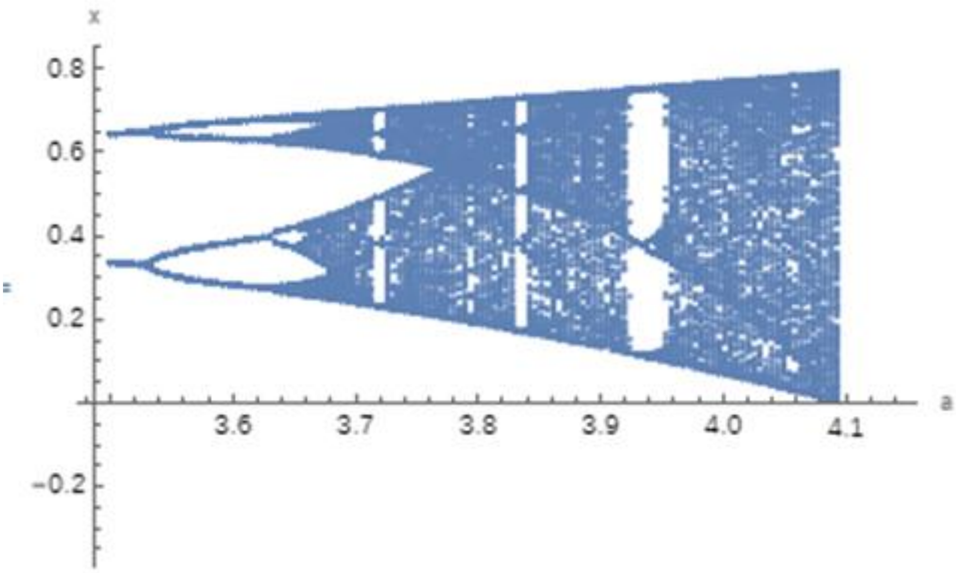


Fig.7. Diagrama de bifurcación para $3.5 < a < 5$

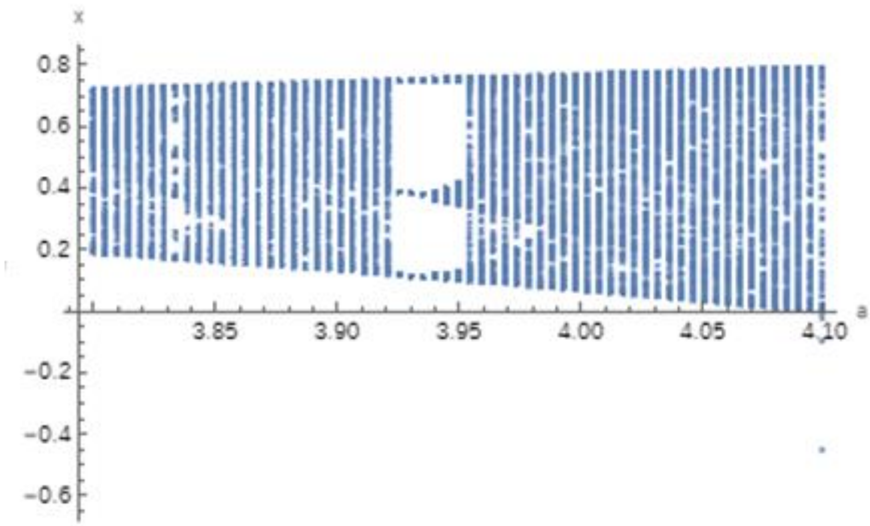


Fig.8. Diagrama de bifurcación para $3.8 < a < 5$

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1. Conclusiones

1) Para $0 < a < 1$, la ecuación (4.1), tiene un único punto fijo, $x_0 = 0$. Además, $x_0 = 0$, es un atractor (estable)

2) Para $1 < a < 3$, se tiene dos puntos uno atractor y el otro inestable.

3) Para dos condiciones iniciales $x_0 = 0.5$ y $x_0 = 0.50001$ con $a = 3.8$ y, al calcular la diferencia de sus gráficas, se obtienen los puntos:

{0.000,-0.000,0.000,0.000,-0.000,-0.000,0.000,-0.0001,0.0001,-0.0001,-0.0000 ,0.0001, 0.0002,-0.0003,0.0005,-0.0008,0.0017,-0.0015,0.0041,0.0026},

el cual, en la Fig3, se muestra que las trayectorias que solucionan la ecuación (4.1), manifiestan una sensibilidad a las condiciones iniciales, más precisamente son inestables. Vale decir, en un determinado tiempo ambas soluciones evolucionan juntas, y divergen rápidamente en su comportamiento con el correr del tiempo.

4) El sistema dinámico discreto (4.1) tiene un comportamiento caótico, puesto que se verifica, según Li-Yorke:

$f_a^3(x_e) = (x_e)$, con $a = 3.88$ y $x_e = 0.10444,\ x_e = 0.13692$

5) El gráfico de la función Exponente de Lyapunov, para valores del parámetro a en el intervalo: (3,5), tiene una región positiva, lo que se concluye que el sistema dinámico discreto (4.1) tiene un comportamiento caótico, tal como se aprecia en la fig.4.

6) La bifurcación muestra la duplicación del período a medida que el parámetro a crece.

5.2. Sugerencias

- Se sugiere realizar un trabajo de investigación cuando se construya un sistema dinámico discreto con las propiedades del sistema (4.1).
- Se sugiere generalizar el sistema dinámico discreto (4.1) en mayores dimensiones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Banks,J., Brooks,J.,Cairns,G., Davis,G, & Stacey,P.(1992).On Devaney's definition of chaos. *American Mathematical Monthly*,99(4),332–334.

Carbajal,V.(2011).*Optimización de Osciladores Caóticos Aplicando Algoritmos Evolutivos*[Tesis doctoral, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica] http://inaoe.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1009/661

Devaney,R.L.(1990). *Chaos, Fractals, and Dynamics*, AddisonWesley.

Effah-Poku , S.,Obeng-Denteh,W,& Dontwi, I. K. (2018). A Study of Chaos in Dynamical Systems.*Hindawi Journal of Mathematics,2018,*1-5 https://doi.org/10.1155/2018/1808953.

Feigenbaum,M.J.(1976).Universality in complex discrete dynamics.*Los Alamos Theoretical Division.*

Froyland,J.(1992). Introduction to Chaos and Coherence, *IOP Publishing Ltd.* 13. Fatiou,A.(2005) .Deterministic chaos , *Msc project*.

Guirao, J. L. & Lampart, M.(2006).Relations Between Distributional Li Yorke and chaos, Chaos, Solitons and Fractals.*Elsevier*.28(3)788–792.

Holmgren,R.A. (1994).A First Course in Discrete Dynamical Systems.*Springer Verlag*.

Gleick ,J. (1987) .Chaos: Making a New Sciencee. *Viking Penguin*.

Hao, B.(1989). Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems. *World Scientific*.

Kulkarni,P.R. & Borkar,V.C.(2015).Period three cycle and chaos in a dynamical system. *International Journal of Multidisciplinary Research and Development*.2(4) 591–594, http://www.allsubjectjournal.com

Li,T.Y. & Yorke, J.A.(1975). Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 82(10)985–992.

Lorenz,E.,(1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Institute of Technology university, Cambridge.*

May,R.M.(1973) .Stability and Complexity in Model Ecosystems. *Acad Press*.

May,R.M. (1974).Biological populations with non overlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science* **186**, 645–647.

May,R.M.(1975). Biological populations obeying difference equations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Jounal Theor. Biol.* **51**, 511–524.

Okulov, A. Y. & Oraevskiĭ, A. N .(1986). Space–temporal behavior of a light pulse propagating in a nonlinear nondispersive medium. *Journal. Opt. Soc. Am. B* **3** (5) 741-746.

Okulov, A. Y. & Oraevskiĭ, A. N. (1984). Regular and stochastic self-modulation in a ring laser with nonlinear element. *Soviet Journal of Quantum Electronics* **14** (2)1235-1237.

Sanchez, C., Muñoz,J.M., Carbajal-Gomez, V.H.,TrejoGuerra, R. & Tlelo-Cuautle E., (2011) .*Automatic Synthesis of Chaotic Attractors Using Surrogate Functions*, International Workshop on Nonlinear Dynamics and Synchronization.

Strogatz,S.H.(1994). Nonlinear Dynamics and Chaos, *Addison-Wesley*, 353.

Takashi,T. & Yamagishi,D.(1997) The Complete Bifurcation Diagram for the Logistic Map. *Department of Electronics and Computer Science*. 52(3)513-516